

Mathematische Methoden der klassischen Mechanik

Vorlesungsnotizen

Stilianos Louca

Mai 2009

Inhaltsverzeichnis

1	Variationsrechnung	5
1.1	Euler-Lagrange Gleichungen	5
1.1.1	Definition: Funktional	5
1.1.2	Definition: Differenzierbares Funktional	5
1.1.3	Satz über S	5
1.1.4	Definition: Extremale Kurve	6
1.1.5	Lemma über triviale Integrale	6
1.1.6	Satz über extremale Kurven	6
1.1.7	Definition: Euler-Lagrange Gleichung	7
1.1.8	Satz über die Euler-Lagrange Gleichung im Mehrdimensionalen	7
1.1.9	Anwendungen in der Mechanik	7
1.1.10	Lemma über die Koordinatenunabhängigkeit	8
1.1.11	Definition: Zyklische Koordinate	8
1.1.12	Noether's Theorem	8
1.2	Legendre Transformation	9
1.2.1	Definition: Konvexe Funktion	9
1.2.2	Lemma: Hinreichende Bedingung zur Konvexität	9
1.2.3	Definition: Legendre Transformation in $\dim = 1$	10
1.2.4	Lemma über die Symmetrie der Legendre Transformation	10
1.2.5	Folgerung: Youngsche Ungleichung	12
1.2.6	Eigenschaften der Legendre Transformation	12
1.2.7	Definition: Legendre Transformation für $n \in \mathbb{N}$	12
1.2.8	Satz über die Legendre Transformierte und Extremale	13
1.2.9	Lemma über quadratische Formen	13
1.2.10	Lemma über die Energieerhaltung	14
1.3	Fluss	14
1.3.1	Definition: Fluss	14
1.3.2	Hilfslemma über den Fluss	15
1.3.3	Lemma von Liouville	16
1.3.4	Satz von Liouville	16
1.3.5	Wiederkehrrsatz von Poincaré	16
2	Mannigfaltigkeiten	18
2.1	Einführung	18
2.1.1	Definition: Karte	18
2.1.2	Definition: Atlas	18
2.1.3	Definition: Differenzierbarer Atlas	18
2.1.4	Definition: Kompatible Atlanten	18
2.1.5	Definition: Differenzierbare Mannigfaltigkeit	18
2.1.6	Definition: Tangentenvektor (Def. 1)	19
2.1.7	Definition: Tangentenvektor (Def. 2)	19
2.1.8	Äquivalenz der beiden Definitionen	20

2.1.9	Definition: Tangentialraum	21
2.1.10	Definition: Tangentialbündel	21
2.1.11	TM als Mannigfaltigkeit	21
2.1.12	Definition: Differenzierbare Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten	22
2.1.13	Definition: df	22
2.1.14	Lemma über die Verkettung von df	23
2.2	Äußere Algebra	23
2.2.1	Definition: 1-Form	23
2.2.2	Definition: 2-Form	24
2.2.3	Definition: k -Form	25
2.2.4	Definition: Tensorprodukt von k -Formen	25
2.2.5	Definition: Wedgeprodukt zweier 1-Formen	26
2.2.6	Lemma zur Basis von $\Lambda^2 V$	26
2.2.7	Definition: Wedgeprodukt mehrerer 1-Formen	26
2.2.8	Lemma zur Basis von $\Lambda^m V$	27
2.2.9	Wedgeprodukt beliebiger k -Formen	27
2.2.10	Definition: Vektorfeld	28
2.2.11	Definition: 1-Differentialform	28
2.2.12	Definition: 1-Differentialform (Alternative)	28
2.2.13	Definition: k -Differentialform	28
2.2.14	Lemma über die Operation von k -Formen	28
2.2.15	Definition: df für skalares Feld $f \in \mathcal{F}$	29
2.2.16	Einschränkung von 1-Formen auf Tangentialräume	29
2.2.17	Definition: Die 1-Formen dx^i	29
2.2.18	Lemma über die Darstellung von Differentialformen	30
2.3	Zurückgezogene Form	30
2.3.1	Definition: Zurückgezogene Form	30
2.3.2	Satz über die zurückgezogene Form	31
2.3.3	Spezialfall: f^*g für skalares Feld g	31
2.3.4	Die Form f^*dQ	31
2.3.5	Die Formen f^*dy^i	31
2.3.6	Spezialfall: Koordinatentransformationen	32
2.3.7	Darstellung von $f^*\omega$ für 1-Form ω	32
2.3.8	Darstellung von $f^*\omega$ für k -Form ω	32
2.3.9	Spezialfall: $f^*\omega$ für n -Form ω	33
2.4	Integration von Differentialformen	33
2.4.1	Motivation	33
2.4.2	Definition: Integration über Polyeder	34
2.4.3	Lemma über die Integration über Polyeder	34
2.4.4	Definition: Singulärer Simplex	34
2.4.5	Definition: Kette	34
2.4.6	Definition: Rand eines k -Simplex	35
2.4.7	Definition: Rand einer k -Kette	35
2.4.8	Lemma über den Rand von Ketten	36
2.4.9	Definition: Integration über Ketten	36
2.4.10	Spezialfall der Integration: Der Simplex als Mannigfaltigkeit	37
2.4.11	Transformationen bei Integration über Ketten	37
2.4.12	Spezialfall der Integration: Flächen im \mathbb{R}^n	37
2.4.13	Definition: Verallgemeinerung der Integrationsgebiete	38
2.5	Differentiation auf Mannigfaltigkeiten	39
2.5.1	Satz über die Integration auf Rändern	39
2.5.2	Definition: $d\omega$	39
2.5.3	Lemma: Wedgeprodukt und äußere Ableitung	39
2.5.4	Satz: Darstellung von $d\omega$	39
2.5.5	Satz über die äußere Ableitung von k -Formen	41
2.5.6	Satz von Stokes	42
2.5.7	Spezialfall: Newton-Leibniz Integralformel	43

2.5.8	Spezialfall: Greensche Formel	43
2.5.9	Kelvin-Stokes Theorem	43
2.5.10	Satz von Ostrogradski-Gauß	44
2.6	Fluss	44
2.6.1	Definition: Vektor (Def. 3)	44
2.6.2	Definition: Vektorfeld	44
2.6.3	Lemma über Vektoren und konstante Funktionen	44
2.6.4	Lemma über Vektoren und Funktionen mit $df = 0$	44
2.6.5	Folgerung: Lokalität von Tangentenvektoren	45
2.6.6	Folgerung: Lokalität von Vektorfeldern	45
2.6.7	Äquivalenz der Vektor-Definitionen	46
2.6.8	Korollar: Kettenregel für Vektoren	47
2.6.9	Darstellung von k -Formen	48
2.6.10	Definition: Lie Klammer	48
2.6.11	Darstellung der Lie-Klammer	48
2.6.12	Eigenschaften der Lie-Klammer	49
2.6.13	Lemma über die Lie-Klammer von Koordinatenvektorfeldern	49
2.6.14	Lemma über Vektorfelder und Koordinaten	49
2.6.15	Definition: 1-Parameter Gruppe von Diffeomorphismen	49
2.6.16	Definition: Lokale 1-Parameter Familie Diffeomorphismen	50
2.6.17	Definition: Integralkurve	50
2.6.18	Definition: Vereinigung von Integralkurven	51
2.6.19	Definition: Maximale Integralkurve	51
2.6.20	Satz über maximale Integralkurven	51
2.6.21	Satz: Existenz und Eindeutigkeit von Integralkurven	52
2.6.22	Zusammenhang zwischen Vektorfeldern und 1-Flüssen	52
2.6.23	Satz über 1-Flüsse	53
2.6.24	Beispiel eines Flusses	53
2.7	Lie-Ableitung	54
2.7.1	Definition: Lie-Ableitung	54
2.7.2	Satz: Gleichheit der Lie-Ableitung und Lie-Klammer	55
2.7.3	Lemma über die Lie-Ableitung von Lie-Klammern	55
2.7.4	Satz über Existenz paralleler Koordinaten	55
2.7.5	Fluss und Lie-Ableitung in parallelen Koordinaten	57
2.7.6	Lemma: Kommutativität lokaler Flüsse	58
2.7.7	Satz: Existenz paralleler Koordinaten (Verallgemeinerung)	59
2.7.8	Definition: Lie-Ableitung von Differentialformen	59
2.7.9	Eigenschaften der Lie-Ableitung	60
2.7.10	Anschauliche Interpretation der Lie-Ableitung	60
2.7.11	Lemma: Leibnizregel für Lie-Ableitung von Differentialformen	61
2.7.12	Folgerung über Koordinatenabhängigkeit von k -Formen	61
2.7.13	Darstellung von $\mathcal{L}_X\omega$	61
2.7.14	Definition: Innere Ableitung	62
2.7.15	Lemma: Laplace-Regel für innere Ableitung	62
2.7.16	Magic Cartan Formula	62
2.7.17	Lemma über Tangentialräume von Untermannigfaltigkeiten	63
3	Symplektische Geometrie	65
3.1	Symplektische Mannigfaltigkeiten	65
3.1.1	Definition: Symplektische Mannigfaltigkeit	65
3.1.2	Darstellung von symplektischen Formen	65
3.1.3	Dimension symplektischer Mannigfaltigkeiten	65
3.1.4	Beispiele symplektischer Mannigfaltigkeiten	65
3.2	Hamiltonsche Vektorfelder	66
3.2.1	Anmerkung: Identifizierung von TM mit T^*M	66
3.2.2	Definition: Hamiltonsches Vektorfeld	67
3.2.3	Korollar: Koordinatendarstellung von X_H	67
3.2.4	Satz: Energieerhaltung	68

3.2.5	Satz über $L_{X_H}\omega$	68
3.2.6	Satz über $\mathcal{L}_{X_H}dH$	69
3.2.7	Satz: Volumenerhaltung	69
3.2.8	Satz über $\mathcal{L}_X\omega$	70
3.2.9	Definition: Poisson-Klammer	70
3.2.10	Lemma: Darstellung der Poisson-Klammer	70
3.2.11	Lemma: Eigenschaften der Poisson-Klammer	71
3.2.12	Korollar: Poisson-Klammer für konstante Hamilton-Funktionen	72
3.2.13	Korollar: Poisson-Klammer für Koordinaten	72
3.2.14	Definition: Integrales Feld	73
3.2.15	Lemma über integrale Felder	73
3.2.16	Lemma über die Lie-Klammer Hamiltonscher Vektorfelder	73
3.3	Der Satz von Darboux	74
3.3.1	Satz von Darboux in $\dim = 2$	74
3.3.2	Satz von Darboux in $\dim = 2n$	74
3.3.3	Poincaré Lemma über symplektische Form	77
3.3.4	Korollar über Darboux-Koordinaten	78
3.3.5	Satz über funktional unabhängige, kommutierende Funktionen	78
3.3.6	Satz: Maximale Anzahl kommutierender, funktional unabhängiger Funktionen	80
3.4	Der Satz von Liouville	81
3.4.1	Satz über die Darstellung von Untergruppen im \mathbb{R}^n	81
3.4.2	Definition: Operation von Gruppe auf Menge	83
3.4.3	Definition: Transitive Operation	84
3.4.4	Definition: Stabilisator	84
3.4.5	Definition: Lokal freie Operation	84
3.4.6	Lemma über den Stabilisator kommutativer Gruppen	85
3.4.7	Kanonische Identifizierung von G mit M	85
3.4.8	Lemma über Fluss-Operationen auf Mannigfaltigkeiten	86
3.4.9	Definition: Integrales System	87
3.4.10	Definition: Blatt	88
3.4.11	Definition: Ausgeartete Menge	88
3.4.12	Satz von Liouville	88
3.5	Probleme der klassischen Mechanik	96
3.5.1	Lemma über Niveaumengen von Hamilton-Funktionen	96
3.5.2	Bemerkung über Hamilton-Fluss mechanischer Systeme	98
3.5.3	Korollar über Polynomiale Integrale	98
3.5.4	Suche nach Integralen	99
3.5.5	Satz von Liouville über Systeme mit 2 Freiheitsgraden	99

1 Variationsrechnung

1.1 Euler-Lagrange Gleichungen

1.1.1 Definition: Funktional

Es seien $t_0 < t_1 \in \mathbb{R}$ und $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$. Betrachten die Mengen der parametrisierten Kurven

$$\mathcal{K} := \underbrace{\{(t, x(t)) : [t_0, t_1] \rightarrow [t_0, t_1] \times \mathbb{R} \mid x = x(t) \in C^\infty([t_0, t_1])\}}_{(\text{Id}, x)}$$

$$\mathcal{K}_{x_0, x_1} := \{(t, x(t)) \in \mathcal{K} \mid x_0 = x(t_0), x_1 = x(t_1)\}$$

Dann heißt jede Abbildung $P : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$ bzw. $P : \mathcal{K}_{x_0, x_1} \rightarrow \mathbb{R}$ *Funktional* auf \mathcal{K} bzw. \mathcal{K}_{x_0, x_1} .

Beispiel: Die *Länge*

$$P[(t, x(t))] := \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + \dot{x}^2(t)} dt$$

1.1.2 Definition: Differenzierbares Funktional

Ein Funktional $P : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *differenzierbar*, falls

$$P[\gamma + h] - P[\gamma] = F(h) + R(h, \gamma) \quad \forall \gamma, h \in \mathcal{K}$$

wobei F linear in h , und

$$R(h, \gamma) = \mathcal{O}(h^2)$$

das heißt für geeignetes $C \in \mathbb{R}$ gilt

$$\|h\| < \varepsilon \wedge \|\dot{h}\| < \varepsilon \Rightarrow |R| < C\varepsilon^2$$

Beispiel: Für $\mathcal{L} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, glatt in allen Komponenten, ist

$$S[(t, x(t))] := \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(x(t), \dot{x}(t), t) dt$$

ein differenzierbares Funktional auf \mathcal{K} . Bemerke: Im vorigen Beispiel war $\mathcal{L}(a, b, c) = \sqrt{1 + b^2}$.

1.1.3 Satz über S

Es sei $\mathcal{L} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ glatt in allen Komponenten. Dann ist

$$S[(t, x(t))] := \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(x(t), \dot{x}(t), t) dt$$

differenzierbar mit

$$F(h) = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right] \cdot h dt + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} h \right) \Big|_{t_0}^{t_1}$$

(vgl. Definition 1.1.2)

Beweis: Beginnend mit dem Satz von Taylor

$$\mathcal{L}(x + h, \dot{x} + \dot{h}, t) = \mathcal{L}(x, \dot{x}, t) + h \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x, \dot{x}, t) + \dot{h} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}(x, \dot{x}, t) + \mathcal{O}(h^2)$$

schreiben wir

$$S[\gamma + h] - S[\gamma] = \int_{t_0}^{t_1} [\mathcal{L}(x + h, \dot{x} + \dot{h}, t) - \mathcal{L}(x, \dot{x}, h)] dt = \int_{t_0}^{t_1} \left[h \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + \left(\frac{dh}{dt} \right) \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right] dt + \underbrace{R(h, \gamma)}_{\mathcal{O}(h^2)}$$

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} h \right) \Big|_{t_2}^{t_1} + \int_{t_1}^{t_2} h \cdot \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right] dt + R(h, \gamma)$$

□

1.1.4 Definition: Extremale Kurve

Eine Kurve $(t, x(t)) \in \mathcal{K}$ heißt *Extremal von S*, falls

$$F[h, (t, x(t))] = 0 \quad \forall h, \quad h(t_1) = h(t_2) = 0$$

1.1.5 Lemma über triviale Integrale

Es sei $f : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t)h(t) dt \equiv 0 \quad \forall h \in \mathcal{C} : h(t_0) = h(t_1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f \equiv 0$$

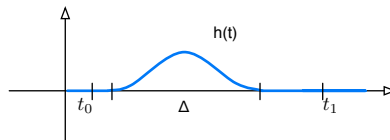
Beweis: Nur Richtung "⇒", da andere trivial. Annahme:

$$\exists t^* \in [t_0, t_1] : f(t^*) \neq 0$$

Da f stetig ist, gilt

$$\exists \Delta \subset [t_0, t_1] : f|_{\Delta} \stackrel{\text{o.B.d.A.}}{>} 0$$

wobei Δ ein nicht triviales Intervall ist. Es ist klar, dass ein $h \in \mathcal{C}$, $h \geq 0$ existiert, mit $\text{sup}(h) = \Delta$



Dann gilt

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t)h(t) dt = \int_{\Delta} \underbrace{f(t)}_{>0} \underbrace{h(t)}_{>0} dt > 0$$

□

1.1.6 Satz über extremale Kurven

Es sei $\mathcal{L} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ glatt in allen Komponenten. Eine Kurve $\gamma = (t, x(t))$ ist ein Extremal von

$$S[\gamma] := \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(x, \dot{x}, t) dt$$

genau dann wenn

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$$

Beweis: Folgt mit $f := \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}$ direkt aus Lemma 1.1.5:

$$0 = F(h) \stackrel{(1.1.3)}{=} - \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \right] \cdot h dt + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \cdot h}_{0} \Big|_{t_0}^{t_1}$$

1.1.7 Definition: Euler-Lagrange Gleichung

Es sei $\mathcal{L} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ glatt in allen Komponenten. Dann heißt die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$$

Euler-Lagrange Differentialgleichung.

1.1.8 Satz über die Euler-Lagrange Gleichung im Mehrdimensionalen

Betrachten

$$\mathcal{K}^n := \left\{ (t, x(t)) \mid x : [t_0, t_1] \xrightarrow{\text{glatt}} \mathbb{R}^n \right\}$$

und für glattes $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ das Funktional

$$S((t, x(t))) := \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(x(t), \dot{x}(t), t) dt$$

Dann gilt: $\gamma := (t, x(t))$ ist Extremal von $S \Leftrightarrow$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} = 0 \quad i = 1, \dots, n$$

Oberes System gewöhnlicher Differentialgleichungen heißen *Euler-Lagrange* Differentialgleichungen.

1.1.9 Anwendungen in der Mechanik

Erinnerung an Hamilton Prinzip

Natur sucht optimale Wege

- Betrachten zunächst das freie Teilchen, beschrieben durch die so genannte *Lagrange Funktion*

$$\mathcal{L}_f = T = \frac{m \|\dot{x}\|^2}{2} = \frac{m}{2} (\dot{x}^1{}^2 + \dot{x}^2{}^2 + \dot{x}^3{}^2)$$

Dann erfüllt \mathcal{L}_f die Euler-Lagrange Gleichungen:

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}_f}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial \mathcal{L}_f}{\partial x^i} = \frac{d}{dt} m \dot{x}^i \Rightarrow x^i(t) = c_i t + \tilde{c}_i$$

Bemerkung: Es lohnt sich, um ein physikalisches Phänomen zu beschreiben, eine geeignete Lagrange Funktion \mathcal{L} zu suchen, die die Evolution des Phänomens durch die Euler-Lagrange Gleichungen beschreibt.

- Betrachten nun mehrere *Teilchen* $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^3$ im Potential $U(x_1, \dots, x_k)$, z.B. das Punkt-Gravitationspotential

$$U(x_1, \dots, x_k) = \sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j}{\|x_i - x_j\|}$$

oder das Gravitationspotential im homogenen Schwerfeld

$$U(x_1, \dots, x_k) = \sum_i m_i x_i^1$$

Mit

$$\mathcal{L} = T - U = \left[\sum_i \frac{m_i}{2} \|\dot{x}_i\|^2 - U \right] : \mathbb{R}^{3n} \times \mathbb{R}^{3n} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

lauten die Euler-Lagrange Gleichungen

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j^i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_j^i} = m_j \ddot{x}_j^i + \frac{\partial U}{\partial x_j^i}, \quad j = 1, \dots, k, \quad i = 1, 2, 3$$

das heißt

$$m_j \ddot{x}_j = -\text{grad}_{x_j} U(x_1, \dots, x_k)$$

was genau dem Newtonschen *Kraftgesetz* entspricht.

- 2-Dimensionales Teilchen im Zentralpotential

$$\mathcal{L}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \frac{m}{2} \|\dot{\vec{r}}\|^2 - U(\|\vec{r}\|) = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - U(\sqrt{x^2 + y^2})$$

In Polarkoordinaten ausgedrückt

$$\mathcal{L}(r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}, t) = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - U(r)$$

ist

$$S(r(t), \varphi(t), t) = \int_{t_0}^{t_1} [(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - U(r)] dt$$

Die Euler-Lagrange Gleichungen lauten dann

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{d}{dt} (mr^2 \dot{\varphi}) \Rightarrow mr^2 \dot{\varphi} = L_0 : \text{const}$$

und

$$0 = \frac{d}{dt} m\dot{r} + U'(r) - mr\dot{\varphi}^2 \Rightarrow m\ddot{r} + U'(r) - \frac{L_0^2}{mr^3} = 0$$

1.1.10 Lemma über die Koordinatenunabhängigkeit

Die Eigenschaft einer Kurve $(t, x(t))$, $x \in \mathcal{K}^n$ optimal zu sein, hängt nicht vom Koordinatensystem ab.

Beweis: Sei dazu $\tau : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ nämlich ein Diffeomorphismus, und

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}, t) := \mathcal{L}'(\tau(x), \dot{\tau}(x), t)$$

wobei \mathcal{L}' die Euler-Lagrange Gleichungen erfülle. Wegen

$$\dot{\tau}(x) = \sum_i \frac{\partial \tau}{\partial x^i} \dot{x}^i$$

gilt

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^j} = \frac{d}{dt} \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{\tau}^i} \frac{\partial \tau^i}{\partial x^j} - \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \tau^i} \frac{\partial \tau^i}{\partial x^j} = \sum_i \frac{\partial \tau^i}{\partial x^j} \underbrace{\left[\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{\tau}^i} - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \tau^i} \right]}_0 = 0$$

□

1.1.11 Definition: Zyklische Koordinate

Eine Koordinate x^i heißt *zyklisch* bzgl. der Lagrange Funktion, falls gilt

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} = 0$$

Beispiel: Die Koordinate φ ist zyklisch bzgl.

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - U(r)$$

1.1.12 Noether's Theorem

Ist x^i zyklisch bzgl. \mathcal{L} , so ist

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} = C : \text{const}$$

für jede Lösung $(t, x(t))$ der Euler-Lagrange Gleichungen.

Beweis:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} = 0$$

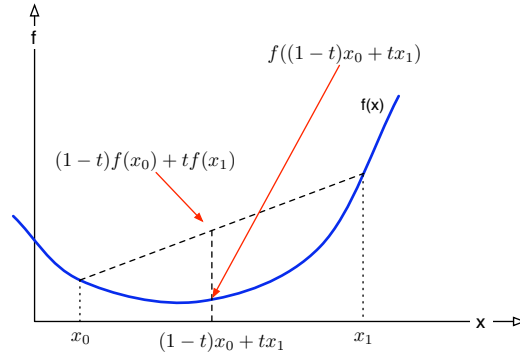
□

1.2 Legendre Transformation

1.2.1 Definition: Konvexe Funktion

Eine Abbildung $f : D(f) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $D(f)$: konvex, heißt *konvex*, falls

$$\forall x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n \forall t \in [0, 1] : (1-t)f(x_0) + tf(x_1) \geq f[(1-t)x_0 + tx_1]$$



1.2.2 Lemma: Hinreichende Bedingung zur Konvexität

Es sei $f : D(f) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ konvex und 2 mal differenzierbar. Ist

$$d^2 f = f'' = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \right)_{i,j=1}^n$$

(vgl. Hesse Matrix oder 2. Ableitung) als Bilinearform positiv definit, das heißt

$$d^2 f(v, v) > 0 \text{ für } 0 \neq v \in \mathbb{R}^n$$

so ist f konvex.

Erinnerung: Es ist

$$d^2 f_{(x)}(v, u) = \left. \frac{d}{ds} \frac{d}{dt} f(x + tv + su) \right|_{t=s=0}$$

Beweis für $n = 1$: Es ist $d^2 f$ genau dann positiv definit wenn $f'' > 0$. Es seien nun $x_0 < x_1 \in D(f)$ beliebig und $v := x_1 - x_0$. Betrachten die Abbildung

$$g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(t) := f(x_0 + tv) - (1-t)f(x_0) - tf(x_1)$$

Es ist $g(0) = g(1) = 0$. Zu zeigen wäre: $g \leq 0$ auf $[0, 1]$. Da g stetig auf dem kompakten Intervall $[0, 1]$, nimmt g in $t^* \in [0, 1]$ ihr Maximum an:

$$g(t^*) = \max_{t \in [0, 1]} g(t)$$

Ist $t^* \in \{0, 1\}$ sind wir fertig. Sei also angenommen $t^* \in (0, 1)$. Da g dort 2 mal differenzierbar ist, muss $g'(t^*) = 0$ und sogar

$$\underbrace{g''(t^*)}_{f''(x_0 + t^*v)} \leq 0$$

sein, was ein Widerspruch zur Annahme $f'' > 0$ ist! \square

Beweis für $n > 1$: Analog zu $n = 1$, mit

$$g(t) := f(x_0 + t\vec{v}) - (1-t)f(x_0) - tf(x_1)$$

1.2.3 Definition: Legendre Transformation in $\dim = 1$

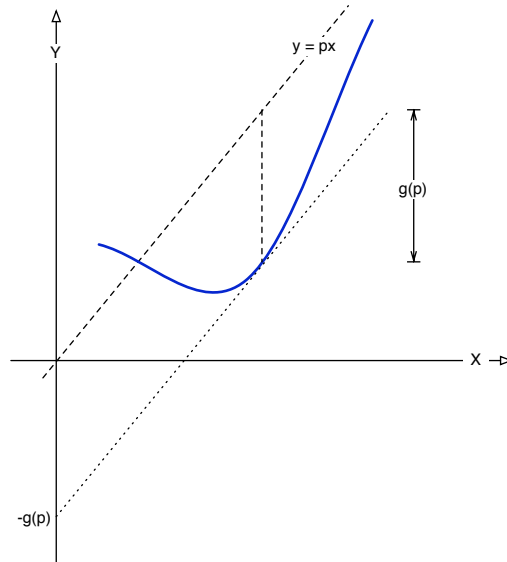
Sei $f : D(f) \rightarrow \mathbb{R}$ konvex. Dann heißt die Funktion

$$g(p) := \max_{x \in D(f)} (xp - f(x))$$

mit dem Definitionsgebiet

$$D(g) = \{p \in \mathbb{R} : \exists \max_{x \in D(f)} (xp - f(x))\}$$

Legendre-Transformierte von f . Man schreibt: $g = f^*$.



Bemerkung: Per Definition gibt es zu $p \in D(f^*)$ stets ein $x_p \in D(f)$ mit

$$f^*(p) = x_p p - f(x_p)$$

1.2.4 Lemma über die Symmetrie der Legendre Transformation

Es sei $f : D(f) \rightarrow \mathbb{R}$ konvex. Dann ist die Legendre-Transformierte $f^* : D(f^*) \rightarrow \mathbb{R}$ konvex und es gilt $(f^*)^* = f$.

Beweis:

- **Konvexität:** Zu zeigen wäre:

$$\forall p_0, p_1 \in D(f^*) \forall t \in [0, 1] : (1-t)f^*(p_0) + tf^*(p_1) \geq f^*[(1-t)p_0 + tp_1]$$

Da

$$f^*[(1-t)p_0 + tp_1] = \max_{x \in D(f)} [(1-t)p_0 + tp_1]x - f(x)$$

genügt es zu zeigen:

$$(1-t)f^*(p_0) + tf^*(p_1) \geq [(1-t)p_0 + p_1 t]x - f(x) \quad \forall x \in D(f)$$

Tatsächlich ist

$$(1-t)f^*(p_0) + tf^*(p_1) \geq (1-t)(x_{p_0} - f(x_{p_0})) + t(x_{p_1} - f(x_{p_1})) = [(1-t)p_0 + tp_1]x - f(x)$$

- **Symmetrie der Transformation:** Für $p \in D(f^*)$ gilt per Konstruktion

$$f^*(p) \geq xp - f(x) \quad \forall x \in D(f)$$

wobei $\exists x_p \in D(f)$ mit

$$f^*(p) = x_p p - f(x_p)$$

Das heißt

$$\forall p \in D(f^*) \forall x \in D(f) : f^*(p) \geq xp - f(x) \Leftrightarrow f(x) \geq px - f^*(p)$$

Sei nun $x_0 \in D(f)$, so ist

$$f(x_0) \geq \sup_{q \in D(f^*)} [x_0 q - f^*(q)]$$

Da f konvex, existiert am Punkt $x_0 \in D(f)$ eine Stützgerade $y = px - g$ (ohne Beweis), das heißt

$$f(x_0) = px_0 - g \wedge px - g \leq f(x) \forall x \in D(f)$$

bzw.

$$x_0 p - f(x_0) = g = \max_{x \in D(f)} [px - f(x)] \stackrel{\text{def}}{=} f^*(p)$$

Haben also ein $p \in D(f^*)$ gefunden mit

$$f(x_0) = x_0 p - f^*(p)$$

womit gezeigt wäre

$$\underbrace{x_0 \in D(f^{**})}_{\Rightarrow D(f) \subset D(f^{**})} \wedge f(x_0) = \max_{q \in D(f^*)} [x_0 q - f^*(q)] = f^{**}(x_0)$$

das heißt

$$f^{**}|_{D(f)} = f$$

Der Schritt $D(f^{**}) \subset D(f)$ wird hier nicht bewiesen.

Rechnerische Bestimmung der Legendre-Transformation

Es sei $f : D(f) \rightarrow \mathbb{R}$ konvex und 2 mal differenzierbar, mit $f'' > 0$. Dann wird

$$f^*(p) = \max_{x \in D(f)} [xp - f(x)] = x_p p - f(x_p)$$

dort angenommen, wo $p = \frac{df}{dx}(x_p)$.

Beispiele:

- Für $f(x) = x^2$, $D(f) = \mathbb{R}$ ist $x_p = \frac{p}{2}$, denn $p = f'(x_p) = 2x_p$, das heißt

$$f^*(p) = \frac{p}{2}p - \frac{p^2}{4} = \frac{p^2}{4}$$

- Für $f(x) = \frac{m}{2}x^2$ folgt analog

$$f^*(p) = \frac{p^2}{2m}$$

- Für $f(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}$, $\alpha > 1$, $D(f) = [0, \infty)$ ist

$$f^*(p) = \frac{p^\beta}{\beta}$$

wobei

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1, \beta > 1$$

1.2.5 Folgerung: Youngsche Ungleichung

Es seien $f \xrightarrow{\text{Legendre}} f^*$. Dann gilt

$$px \leq f(x) + f^*(p)$$

für $x \in D(f)$, $p \in D(f^*)$. Insbesondere folgt für $f = \frac{x^2}{2}$ die bekannte Ungleichung

$$xp \leq \frac{x^2 + p^2}{2}$$

sowie für $f(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}$ und $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ die Ungleichung

$$xp \leq \frac{x^\alpha}{\alpha} + \frac{p^\beta}{\beta}$$

1.2.6 Eigenschaften der Legendre Transformation

Es sei $f : D(f) \rightarrow \mathbb{R}$ 2 mal differenzierbar und $f'' > 0$, wobei $D(f) \subset \mathbb{R}$ konvex sei. Dann gilt:

1. Die Legendre Transformierte $f^* : D(f^*) \rightarrow \mathbb{R}$ ist ebenfalls 2 mal differenzierbar und für $x \in D(f)$ ist

$$\left. \frac{df^*}{dp} \right|_{p: f'(x)=p} = x$$

2. Für $\tilde{f} := f - C$ mit $C : \text{const}$, ist

$$\tilde{f}^* = f^* + C$$

Beweis:

1. Es sei $x_p = x(p)$ die Lösung von $f'(x_p) = p$ (bemerke dass wegen $f'' > 0$ die Abbildung f' streng monoton wachsend und somit injektiv ist), das heißt

$$g(p) = px_p - f(x_p)$$

(vgl. Abschnitt 1.2.4). Dann folgt

$$\frac{df^*}{dp}(p) = \frac{d}{dp} [px_p - f(x_p)] = x_p + p \frac{dx(p)}{dp} - f'(x(p)) \cdot \frac{dx}{dp} = x(p) + \frac{dx(p)}{dp} \underbrace{[p - f'(x(p))]}_0 = x_p$$

2. Trivial.

1.2.7 Definition: Legendre Transformation für $n \in \mathbb{N}$

Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (D konvex) konvex, das heißt für $x_1, x_2 \in D$ und $t \in [0, 1]$ gilt

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$$

Man definiert die *Legendre Transformierte* $f^* : D(f^*) \subset \mathbb{R}^{n*} \rightarrow \mathbb{R}$ von f gemäß

$$f^*(p) := \max_{x \in D(f)} \{p(x) - f(x)\}, \quad p \in D(f^*) \subset \underbrace{\mathbb{R}^{n*}}_{\substack{\text{Dualraum} \\ \text{zu } \mathbb{R}^n}}$$

wobei

$$D(f^*) := \left\{ p \in \mathbb{R}^{n*} : \exists \max_{x \in D(f)} \{p(x) - f(x)\} \right\}$$

Anschauliche Darstellung: Jede 1-Form $p \in D(f^*)$ erzeugt auf natürlicher Weise eine Hyperebene im \mathbb{R}^{n+1} , nämlich deren Graph. $f^*(p)$ ist dann analog zum 1-dimensionalen Fall das Maximum des vertikalen Unterschieds der Funktion zur Ebene.

1.2.8 Satz über die Legendre Transformierte und Extremale

Sei $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(a, b, c) \mapsto \mathcal{L}(a, b, c)$ konvex bzgl. der 2. Variablen. Dann gilt: Eine Kurve $(t, x(t))$ ist genau dann ein Extremal von

$$S(t, x(t)) = \int_{t_0}^{t_0} \mathcal{L}(x(t), \dot{x}(t), t) dt \quad (1)$$

wenn für die Legendre Transformierte $\mathcal{H} := \mathcal{L}^*$ von \mathcal{L} bzgl. der 2. Variablen gilt:

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = -\dot{p} \quad , \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \dot{x}} \quad (2)$$

mit

$$p(t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}(x(t), \dot{x}(t), t)$$

Man nennt obere Differentialgleichungen *Hamiltonsche Differentialgleichungen*.

Beweis: Es ist

$$\mathcal{H}(x, p, t) = p\dot{x}(p) - \mathcal{L}(x, \dot{x}(p), t) \quad \text{mit} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = p$$

Mit

$$d\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} dp + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dt$$

einerseits und

$$d\mathcal{H} \stackrel{(1.2.6)}{=} \sum_{i=1}^n -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} dx^i + \sum_{i=1}^n \dot{x}^i dp^i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt$$

andererseits, folgt durch Koeffizientenvergleich

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p^i} = \dot{x}^i \quad , \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^i} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} = -\dot{p}^i$$

□

Beispiel: Mit

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - U(x, y)$$

und (t, x) als Extremal von S (vgl. Gl. 1), ist

$$\mathcal{H} = \mathcal{L}^* \Big|_2 = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2) + U(x, y)$$

wobei $p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}$ und $p_y = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}$ sind.

1.2.9 Lemma über quadratische Formen

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine quadratische Form:

$$f(x) = a_{ij} x^i x^j$$

mit $f'' > 0$, das heißt (a_{ij}) positiv definit. Dann gilt: $f(x) = f^*(p)$ für $p = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_x$.

Beweis: Es sei o.B.d.A (a_{ij}) symmetrisch. Mit

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_x (v) = a_{ij} x^i v^j + a_{ij} x^j v^i \stackrel{v \equiv x}{=} 2a_{ij} x^i x^j = 2f(x)$$

folgt

$$f^*(x) = p(x) - f(x) \Big|_{\frac{\partial f}{\partial x} = p} = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_x (x)}_{2f(x)} - f(x) = f(x)$$

□

1.2.10 Lemma über die Energieerhaltung

Es sei $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$. Dann gilt für $\mathcal{H} = \mathcal{L}^*|_2$:

$$\mathcal{H}(x(t), p(t), t) = \text{const}$$

für jede Lösung (t, x) der Hamilton DGL.

Beweis:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}(x(t), p(t), t) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \dot{p} + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}}_0 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \left(-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \right) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \right) = 0$$

Anwendung: Betrachten die Lagrange Funktion

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - U(\sqrt{x^2 + y^2})$$

in Polarkoordinaten (r, φ) :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - U(r)$$

Mit

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left(p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\varphi^2 \right) + U(r)$$

folgt

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi} = -\dot{p}_\varphi = 0 \Rightarrow \underbrace{p_\varphi}_{\dot{\varphi}} =: c_1 : \text{const}$$

Wegen $\partial_t \mathcal{H} = 0$ ist nach Lemma 1.2.10

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left(p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\varphi^2 \right) + U(r) =: c_2 : \text{const} \Rightarrow \underbrace{p_r(t)}_{\dot{r}} = \pm \sqrt{2[c_2 - U(r)] - \frac{c_1^2}{r^2}} \cong p_r(r(t))$$

woraus sich die Lösung ergibt gemäß

$$t = \pm \int \frac{dr}{\sqrt{2[c_2 - U(r)] - \frac{c_1^2}{r^2}}}$$

1.3 Fluss

1.3.1 Definition: Fluss

Es sei $\mathcal{H} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ und $(p, q) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ die allgemeine Lösung der Hamilton-Gleichungen

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \dot{q}, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = -\dot{p} \tag{3}$$

Dann definiert man den *Fluss*

$$g : \mathbb{R} \times [U \times V] \rightarrow U \times V, \quad U, V \subset \mathbb{R}^n$$

bzgl. \mathcal{H} wie folgt: Zu $t \in \mathbb{R}$ und $(p_0, q_0) \in \mathbb{R}^{2n}$ ist

$$g^t(p_0, q_0) := (p(t), q(t)) \quad \text{mit} \quad (p(0), q(0)) = (p_0, q_0)$$

g ordnet also dem Anfangswertproblem $(p(0), q(0)) \stackrel{!}{=} (p_0, q_0)$ zu den DGL 3 den Wert $(p(t), q(t))$ zu.

Bemerke:

- Man kann entweder voraussetzen, dass die Lösung für das AWP stets existieren, oder U und V werden entsprechend auf die sinnvollen Werte eingeschränkt.

- $\{g^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ bilden eine Gruppe bzgl. der Verkettung:

$$g^{t_1} \circ g^{t_2} := g^{t_1+t_2}$$

Anschauliche Erläuterung: Betrachten das DGL-System $\dot{x} = f(x)$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ und den dazu entsprechenden Fluss g . Das Feld $f(x)$ entspricht anschaulich einer *Flussrichtung* bzw. einer *Flussstärke* an jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^n$. Der Punkt $g^t(x_0)$ ist der Punkt, an dem ein *Teilchen*, beginnend am Punkt x_0 , nach Zeit t ankommen würde.

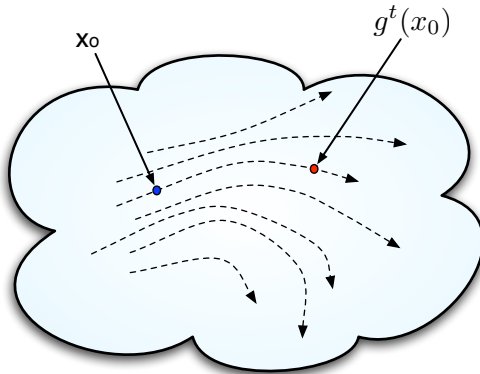


Abbildung 1: Zur Erläuterung des Flusses

1.3.2 Hilfslemma über den Fluss

Es sei $\dot{x} = f(x)$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Differentialgleichungssystem, so dass Lösungen für alle $t \in \mathbb{R}$ existieren. Dazu sei $g : \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$ der entsprechende Fluss, das heißt für $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ ist $x(t) = g^t(x_0)$ die Lösung des AWP $x(0) = x_0$. Dann gilt für jede messbare Menge $D \subset U$:

$$\left. \frac{d}{dt} \text{Vol}(g^t(D)) \right|_{t=0} = \int_D \text{div } f \, dx$$

Beweis: Für eine Matrix $A \in \mathcal{M}(n \times n)$ und Skalar $t \in \mathbb{R}$ ist

$$\det(\text{Id} + tA) = 1 + t \cdot \text{trace}(A) + \mathcal{O}(t^2) \quad (4)$$

denn

$$\det(\text{Id} + tA) \stackrel{t \neq 0}{=} t^n \det\left(\frac{1}{t} \text{Id} + A\right) = t^n \chi_{-A}\left(\frac{1}{t}\right) = t^n \left[\frac{1}{t^n} - \frac{1}{t^{n-1}} \cdot \underbrace{\text{trace}(-A)}_{-\text{trace}(A)} + \dots \right]$$

Zusammen mit

$$g^t(x_0) = \underbrace{x(0)}_{x_0} + \underbrace{\dot{x}(0)}_{f(x_0)} t + \mathcal{O}(t^2) \quad (5)$$

folgt dann für eine messbare Menge $D \subset U$

$$\begin{aligned} \text{Vol}(g^t(D)) &= \int_{g^t(D)} dy \stackrel{y=g^t(x)}{=} \int_D \det\left(\frac{\partial g^t}{\partial x}\right) dx = \int_D \det\left[\text{Id} + \frac{\partial f}{\partial x} t + \mathcal{O}(t^2)\right] dx \\ &\stackrel{4}{=} \int_D \left[1 + t \cdot \underbrace{\text{trace}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}_{\text{div } f} + \mathcal{O}(t^2) \right] dx = \int_D dx + t \cdot \int_D \text{div } f(x_0) dx + \mathcal{O}(t^2) \end{aligned}$$

□

1.3.3 Lemma von Liouville

Es sei $\dot{x} = f(x)$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Differentialgleichungssystem, so dass Lösungen für alle $t \in \mathbb{R}$ existieren, und

$$g : \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R}^n, U \subset \mathbb{R}^n$$

der zu f entsprechende Fluss. Gilt

$$\operatorname{div} f = 0$$

so ist

$$\operatorname{Vol}(g^t(D)) = \operatorname{Vol}(D)$$

für jede messbare Menge $D \subset U$ und $t \in \mathbb{R}$. Der Fluss g erhält also Volumina.

Beweis: Direkte Folgerung des Hilfslemmas 1.3.2:

$$\left. \frac{d}{dt} \operatorname{Vol}(g^t(D)) \right|_{t=t_0} = \left. \frac{d}{dt} \operatorname{Vol}(g^{t_0+t}(D)) \right|_{t=0} = \int_{g^{t_0}(D)} \underbrace{\operatorname{div} f}_0 dx = 0$$

□

1.3.4 Satz von Liouville

Es sei $D \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ messbar und $g : \mathbb{R} \times U \times V \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ der über \mathcal{H} definierte Fluss (vgl. 3). Dann gilt:

$$\operatorname{Vol}(D) = \operatorname{Vol}(g^t(D)) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Beweis: Mit

$$f(q, p) := \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}, -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \right), \quad (\dot{q}, \dot{p}) = f(q, p)$$

und

$$\operatorname{div} f = \sum_i \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial q_i \partial p_i} - \sum_i \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p_i \partial q_i} = 0$$

ist der Satz eine direkte Folgerung des Lemmas von Liouville (1.3.3).

1.3.5 Wiederkehrsatze von Poincaré

Es sei (Ω, Σ, μ) ein endlicher Maßraum und $g : \Omega \rightarrow \Omega$ eine maßerhaltende, messbare Abbildung. Dann gilt:

Für jede messbare Menge $U \subset \Omega$ mit $\mu(U) > 0$, bilden die Punkte $x \in U$, deren iterierte $\{g^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ nicht beliebig oft nach U zurückkehren, eine μ Nullmenge, das heißt

$$\mu(\{x \in U \mid \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : g^n(x) \notin U\}) = 0$$

Mit anderen Worten: Fast jeder Punkt $x \in U$, kehrt durch g^n , $n \in \mathbb{N}$ unendlich mal wieder zu U zurück.

Bemerkung: Die Endlichkeit des Maßraumes (Ω, Σ, μ) ist wichtig!

Spezialfall: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Sigma = \mathcal{B}(\Omega)$, $\mu = \lambda$ (Lebesgue Maß).

Beweis: Sei

$$A_n := \bigcup_{k=n}^{\infty} g^{-k} U$$

Es ist klar dass $U \subset A_0$ und $A_i \subset A_j$ für $j \leq i$. Außerdem ist wegen $A_i = g^{j-i} A_j$ und der μ -Invarianz von g

$$\mu(A_i) = \mu(A_j) \quad \forall i, j \geq 0$$

Nun gilt für jedes $n > 0$

$$U \setminus A_n \subset A_0 \setminus A_n$$

so dass gilt

$$\mu(U \setminus A_n) \leq \mu(A_0 \setminus A_n) \stackrel{\mu \text{ endlich}}{=} \mu(A_0) - \mu(A_n)$$

das heißt

$$\mu(U \setminus A_n) = 0 \quad \forall n > 0$$

Dies impliziert

$$\mu\left(U \setminus \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (U \setminus A_n)\right) = 0$$

Doch

$$U \setminus \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

ist genau die Menge an Punkten $x \in U$ für die für irgendein n und alle $k > n$ gilt $f^k(x) \notin U$. \square

Beispiel 1: Für ein 2-D Teilchen im Potential V , mit $\lim_{q \rightarrow \infty} V(q) = \infty$, und Hamilton-Funktion $\mathcal{H}(q, p) = T(q, p) + V(q, p)$, ist der entsprechende Fluss g^t (für irgendein $t > 0$) genau wie im Wiederkehersatz von Poincaré (1.3.5). Für jede noch so kleine, nicht-triviale Umgebung U im Phasenraum Ω , kehrt das Teilchen mit Anfangszustand $(p, q) \in U$, fast sicher nach endlicher Zeit wieder in die Zustands-Umgebung U zurück, und zwar unendlich oft!

Bemerke: Ohne die Bedingung $\lim_{q \rightarrow \infty} V(q) = \infty$ ist der Phasenraum Ω nicht beschränkt und gegebenenfalls sogar mit Maß ∞ . Dies verletzt die Voraussetzungen des Satzes von Poincaré!

Beispiel 2: Betrachten zwei verbundene Gaskammern A, B gefüllt mit elastisch stoßenden Gasteilchen, und eine beliebige Umgebung $U \subset \Omega$ im (endlichen) Phasenraum, in der die Teilchen stets in Kammer A sind. Dann gilt: Für fast alle Anfangskonfigurationen $(q, p) \in U$ kehren die Teilchen nach endlicher Zeit in die Kammer A zurück!

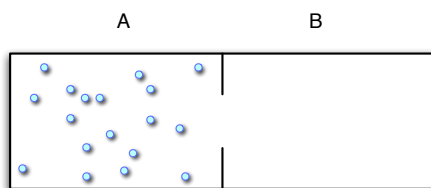


Abbildung 2: Zum Wiederkehersatz: Zwei verbundene Gaskammern

2 Mannigfaltigkeiten

2.1 Einführung

Es sei M ein metrischer Raum, wodurch automatisch Begriffe wie Stetigkeit und Umgebung definiert seien.

Bemerke: Es genügt eigentlich zu fordern, dass M ein Hausdorff-Raum ist.

2.1.1 Definition: Karte

Eine *Karte* φ (im Punkt $x \in M$) ist eine bijektive, stetige (in beide Richtungen) Abbildung

$$\varphi : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \varphi(D) \subset M$$

wobei sowohl D als auch $\varphi(D)$ offen seien, so dass $x \in \varphi(D)$.

2.1.2 Definition: Atlas

Ein *Atlas* ist eine Familie $(D_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ von Karten auf M , so dass

$$M = \bigcup_{\alpha \in A} \varphi_\alpha(D_\alpha)$$

und

$$\varphi_i^{-1} \circ \varphi_j : \underbrace{\varphi_j^{-1}(\varphi_j(D_j) \cap \varphi_i(D_i))}_{\subset \mathbb{R}^n} \rightarrow \underbrace{\varphi_i^{-1}(\varphi_j(D_j) \cap \varphi_i(D_i))}_{\subset \mathbb{R}^n}$$

für jedes $i, j \in A$ eine stetige, bijektive Abbildung ist.

2.1.3 Definition: Differenzierbarer Atlas

Ein Atlas $(D_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ heißt *differenzierbar* (\mathcal{C}^∞), falls alle $\varphi_i^{-1} \circ \varphi_j$ differenzierbar (\mathcal{C}^∞) sind. Man fordert zusätzlich: Die Menge von Karten ist abzählbar.

2.1.4 Definition: Kompatible Atlanten

Zwei differenzierbare Atlanten $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$, $\{\psi_\beta\}_{\beta \in B}$ heißen *kompatibel*, falls

$$\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in A} \cup \{\psi_\beta\}_{\beta \in B}$$

auch ein differenzierbarer Atlas ist.

Bemerke: Kompatibilität von Atlanten ist eine Äquivalenzrelation.

2.1.5 Definition: Differenzierbare Mannigfaltigkeit

Eine *differenzierbare* (\mathcal{C}^∞ , *glatte*) *Mannigfaltigkeit* ist ein metrischer Raum M ausgestattet mit einer Äquivalenzklasse von differenzierbaren (glatte) Atlanten.

Beispiele:

1. Jede offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ ausgestattet mit der Karte $\varphi = \text{Id}$, $D = U$.
2. Die Einheitskugeloberfläche $S_2 \subset \mathbb{R}^3$ ausgestattet mit der Euklidischen Metrik $d = d_E|_{S_2}$ ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Einen differenzierbaren Atlas stellen die folgenden 6 Karten dar:

$$\varphi_\pm : D := \{x^2 + y^2 < 1\} \rightarrow S_2, \varphi_\pm(x, y) := (x, y, \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2})$$

Analog auch x, z und y, z

3. Der Torus $T^2 := \mathbb{R}^2 / \sim$ als Menge aller Äquivalenzklassen bzgl. der Äquivalenzrelation

$$\underbrace{(x, y)}_{\in \mathbb{R}^2} \sim (x', y') \Leftrightarrow (x - x', y - y') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

ausgestattet mit der Metrik

$$d([q_0], [p_0]) := \min_{\substack{q \in [q_0] \\ p \in [p_0]}} d_e(q, p)$$

wird durch die Karte

$$\varphi : [0, 1)^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 / \sim, \quad \varphi(x) := [x]$$

zu einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit.

4. Es seien $f_1, \dots, f_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, so dass df_i in jedem Punkt linear unabhängig sind. Für feste Konstanten a_1, \dots, a_k ist

$$M := \{x \in \mathbb{R}^n : f_i(x) = a_i, i = 1, \dots, k\} \subset \mathbb{R}^n$$

ausgestattet mit der Euklidischen Metrik eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.

Beweis: Nach dem Satz über implizite Funktionen existiert für jedes $x \in M$ ein $\varepsilon > 0$, Koordinaten $y_{i_1}, \dots, y_{i_{n-k}}$ und Abbildung

$$g : D \subset \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad \begin{pmatrix} y_{i_1} \\ \vdots \\ y_{i_{n-k}} \end{pmatrix} \xrightarrow{g} \begin{pmatrix} g_1(y_{i_1}, \dots, y_{i_{n-k}}) \\ \vdots \\ g_k(y_{i_1}, \dots, y_{i_{n-k}}) \end{pmatrix}$$

mit $M \cap B_\varepsilon(x) = \text{graph}(g)$ (gegebenfalls nach geeigneter Umordnung der Koordinaten).

2.1.6 Definition: Tangentenvektor (Def. 1)

Vorbetrachtung: Es sei $f : U_1 \subset \mathbb{R}^n \rightarrow U_2 \subset \mathbb{R}^n$ eine bijektive, differenzierbare Funktion. Dann induziert diese für jeden Vektor v_1 im Punkt $x_1 \in U_1$ einen *äquivalenten* Vektor $v_2 = df|_{x_1}(v_1)$ im Punkt $x_2 = f(x_1) \in U_2$ (vgl. Abbildung 3).

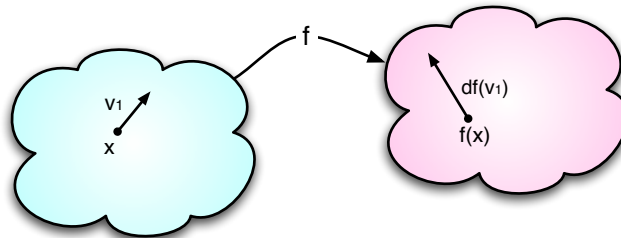


Abbildung 3: Zur Gleichheit von Vektoren im \mathbb{R}^n

Verallgemeinerung: Betrachten nun einen Punkt $x \in M$, dazu Karte $\varphi_1 : D \rightarrow M$ mit $x \in \varphi_1(D)$. Nennen *Tangentenvektor* v_1 im Punkt $x \in M$ zu Karte φ_1 jeden Vektor im Punkt $\varphi_1^{-1}(x) \in \mathbb{R}^n$. Dieser sei gleich zu einem Vektor v_2 in x zu Karte φ_2 falls

$$d(\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1)(v_1) = v_2$$

(Transformationsverhalten).

2.1.7 Definition: Tangentenvektor (Def. 2)

Vorbetrachtung: Betrachten den Punkt $x = \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ für glatte Kurven γ_i in \mathbb{R}^n , wobei gelte

$$\dot{\gamma}_1(0) = \dot{\gamma}_2(0) = \xi$$

Dann ist mit $t \rightarrow 0$

$$\|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)\| = \mathcal{O}(t^2)$$

Verallgemeinerung: Es sei nun $x \in M$ fest. Definieren einen *Vektor* in $x \in M$ als Äquivalenzklasse $[\gamma]$ glatter Kurven

$$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \quad \text{mit} \quad \gamma(0) = x$$

bzgl. der Äquivalenzrelation

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \Leftrightarrow \forall \underbrace{\varphi}_{\text{Karte}} : |\varphi^{-1}(\gamma_1(t)) - \varphi^{-1}(\gamma_2(t))| = \mathcal{O}(t^2) \quad (*)$$

(vgl. Abbildung 4).

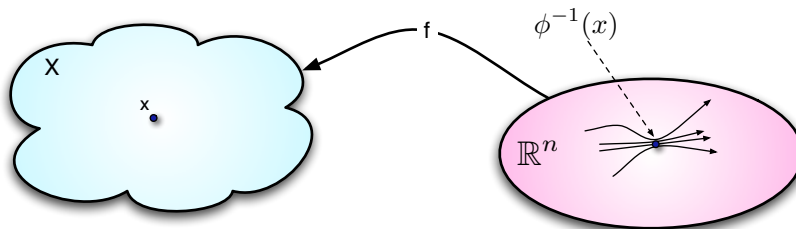


Abbildung 4: Zur Äquivalenz von Kurven im Punkt x

Bemerke:

- Ist (*) für eine Karte φ erfüllt, so ist sie es für alle Karten.
- Manchmal identifiziert man (bei festgelegter Karte φ) $\gamma : I \rightarrow M$ mit der entsprechenden Kurve $\varphi^{-1} \circ \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ und erweitert den gleichen Äquivalenzklassenbegriff auch auf diese. Natürlich gilt

$$\gamma' \in [\gamma] \Leftrightarrow (\varphi^{-1} \circ \gamma') \in [\varphi^{-1} \circ \gamma]$$

2.1.8 Äquivalenz der beiden Definitionen

Jeder Vektor aus der ersten Definition entspricht einem Vektor aus der 2., und umgekehrt.

- Wählt man v als Vektor in $x \in M$ bzgl. Karte φ (1. Definition), so induziert dieser den Vektor

$$[\gamma] \quad \text{mit} \quad \gamma(t) := \varphi(\varphi^{-1}(x) + vt)$$

entsprechend der 2. Definition. Bemerke dass die Zuordnung

$$\mathbb{R}^n \ni v \mapsto [\varphi(\varphi^{-1}(x) + vt)] \in T_x M$$

eindeutig ist.

- Wählt man $[\gamma]$ als Vektor in $x \in M$ bzgl. Definition 2, so ist

$$\frac{d}{dt} (\varphi^{-1} \circ \gamma) \Big|_{t=0} \tag{6}$$

der entsprechende Vektor zur Karte φ nach Definition 1. Dabei ist diese Zuordnung repräsentationsunabhängig, denn es ist

$$[\gamma] = [\zeta]$$

$$\Leftrightarrow |\varphi^{-1}\gamma(t) - \varphi^{-1}\zeta(t)| \in \mathcal{O}(t^2)$$

$$\Leftrightarrow \left| \cancel{\varphi^{-1}\gamma} \Big|_{t=0} + \frac{d}{dt} \varphi^{-1}\gamma \Big|_{t=0} + \mathcal{O}(t^2) - \cancel{\varphi^{-1}\zeta} \Big|_{t=0} - \frac{d}{dt} \varphi^{-1}\zeta \Big|_{t=0} + \mathcal{O}(t^2) \right| \in \mathcal{O}(t^2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} [\varphi^{-1} \circ \gamma] \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} [\varphi^{-1} \circ \zeta] \Big|_{t=0} \tag{7}$$

2.1.9 Definition: Tangentialraum

Es sei M eine n -dimensionale, differenzierbare Mannigfaltigkeit. Die Menge $T_x M$ aller Vektoren zu $x \in M$ nennt man den *Tangentialraum* zum $x \in M$. Dabei ist $T_x M$ tatsächlich ein Vektorraum:

Def. 1: $T_x M$ ist nach Wahl einer Karte direkt identifizierbar mit \mathbb{R}^n . Dabei hängen die Operationen auf Vektoren nicht von der Verwendeten Karte ab:

$$d(\varphi_2^{-1}\varphi_1)(\xi_1 + \xi_2) = d(\varphi_2^{-1}\varphi_1)(\xi_1) + d(\varphi_2^{-1}\varphi_1)(\xi_2)$$

Somit ist insbesondere $\dim T_x M = n$.

Def. 2: Für zwei glatte Kurven $\gamma_1, \gamma_2 : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$, $\gamma_i(0) = x$ und Karte φ sei

$$[\gamma_1] + [\gamma_2] = [\varphi^{-1}\gamma_1 + \varphi^{-1}\gamma_2 - \varphi^{-1}(x)]$$

Bemerke dass

$$[\varphi^{-1}\gamma_1 + \mathcal{O}_1(t^2) + \varphi^{-1}\gamma_2 + \mathcal{O}_2(t^2) - \varphi^{-1}(x)] = [\varphi^{-1}\gamma_1 + \varphi^{-1}\gamma_2 - \varphi^{-1}(x)]$$

2.1.10 Definition: Tangentialbündel

Man nennt die Vereinigung aller Tangentialräume

$$TM := \bigcup_{x \in X} T_x M$$

Tangentialbündel von M .

Bemerke: Jedes Element $(x, \xi) \in TM$ wird identifiziert mit dem Vektor $\xi \in T_x M$ im Punkt $x \in M$.

2.1.11 TM als Mannigfaltigkeit

Das Tangentialbündel TM einer n -dimensionalen, C^∞ Mannigfaltigkeit M ist eine $2n$ -dimensionale (C^∞) differenzierbare Mannigfaltigkeit.

Erläuterung: Das M Struktur eines metrischen Raumes aufweist, sei hier vorenthalten. Dabei ist eigentlich nur der Nachweis einer topologischen Struktur notwendig.

Sei nun $(x, \xi) \in TM$ beliebig, dazu Karte (φ, U) in $x \in M$. Gesucht ist nun eine glatte, bijektive Abbildung

$$\Phi : D \subset \mathbb{R}^{2n} \rightarrow TM \quad \text{mit} \quad (x, \xi) \in \Phi(D)$$

Definieren wir

$$\Phi : \underbrace{U \times \mathbb{R}^n}_{D \subset \mathbb{R}^{2n}} \rightarrow TM, \quad \Phi(u, \rho) := \underbrace{(\varphi(u))}_{\in M}, \underbrace{[\varphi(u + \rho t)]}_{\substack{\in T_{\varphi(u)} M \\ \text{nach} \\ 2. \text{ Def.}}}$$

so ist Φ bijektiv und glatt. Doch sogar der gesamte, so erzeugte (über alle Karten φ von M) Atlas ist glatt (vgl. 2.1.3), das heißt

$$\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1 : D \subset \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n} \quad \text{für } D \text{ geeignet}$$

ist stets glatt, denn:

Für $(u_1, \rho_1) \in \mathbb{R}^{2n}$ mit $\Phi_1(u_1, \rho_1) = (x, \xi) \in T_x M$ und $\Phi_2^{-1}(x, \xi) = (u_2, \rho_2)$ gilt nach Definition 1 von Vektoren (bzw. Bemerkung 2.1.8)

$$\rho_2 = d_{u_1} \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1(\rho_1)$$

und somit

$$(\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1)(u, \rho) = (\varphi_2^{-1}\varphi_1(u), d|_u \varphi_2^{-1}\varphi_1(\rho))$$

das heißt beide Komponenten von $\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1$ und somit auch $\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1$ selber sind glatt. Bemerke: Bijektivität ist gesichert, da

$$d(\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1) \cdot d(\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2) = d(\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 \circ \varphi_1^{-1} \circ \varphi_2) = d(\text{Id}) = \text{Id} \Rightarrow d(\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2) = [d(\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1)]^{-1}$$

2.1.12 Definition: Differenzierbare Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten

Es seien M, N jeweils eine m bzw. n dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann heißt $f : M \rightarrow N$ *differenzierbar (glatt)* \Leftrightarrow Für beliebige Karten $(\varphi, U), (\psi, D)$ auf M bzw. N ist

$$\psi^{-1} \circ f \circ \varphi : \varphi^{-1}(f^{-1}(\psi(D))) \rightarrow D \subset \mathbb{R}^n$$

differenzierbar (glatt).

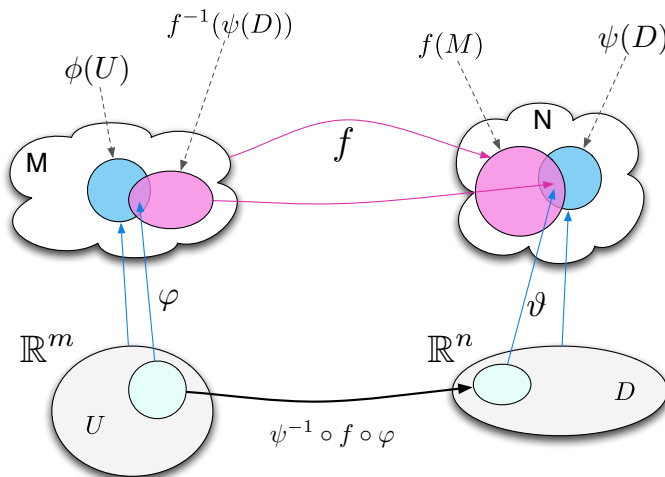


Abbildung 5: Zum Definitionsgebiet von $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi$

Nennen speziell $\mathcal{F} := \mathcal{C}^\infty(M)$ den Raum aller glatten Abbildungen $f : M \rightarrow \mathbb{R}$.

2.1.13 Definition: df

Eine differenzierbare Abbildung $f : M \rightarrow N$ induziert eine differenzierbare Abbildung $TM \rightarrow TN$ gemäß

$$(x, \underbrace{[\gamma]}_{\in T_x X}) \xrightarrow{df} (f(x), [f(\gamma)])$$

Wohldefiniertheit: Zu klären wäre die Unabhängigkeit von der Kurve γ . Tatsächlich ist für Kurven γ_1, γ_2 :

$$\begin{aligned} \gamma_1 \sim \gamma_2 &\Rightarrow \varphi^{-1}(\gamma_1) - \varphi^{-1}(\gamma_2) = \mathcal{O}(t^2) \\ &\Rightarrow \psi^{-1}(f(\gamma_1)) - \psi^{-1}(f(\gamma_2)) = \mathcal{O}(t^2) \\ &\Rightarrow f(\gamma_1) \sim f(\gamma_2) \end{aligned}$$

denn

$$\psi^{-1}(f(\gamma_1)) = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi(\varphi^{-1}(\gamma_1)) = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi(\varphi^{-1}(\gamma_2) + \mathcal{O}(t^2)) = \psi^{-1} \circ f(\gamma_2) + \mathcal{O}(t^2)$$

Interpretation: Es seien φ und ψ jeweils eine Karte auf M und N . Per Konstruktion ordnet df dem Vektor $[\gamma] \in T_x M$ (nach 2. Def.) den Vektor $[f(\gamma)]$ zu. Im Kontext der 1. Definition von Vektoren ist für

$$\frac{d}{dt}(\varphi^{-1} \circ \gamma) |_{t=0} = \xi$$

genau $\xi \cong [\gamma]$. Dann ist

$$[f(\gamma)] \cong \frac{d}{dt}(\psi^{-1} \circ f \circ \varphi \circ \gamma) |_{t=0} = \frac{d}{dt}(\psi^{-1} \circ f \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \circ \gamma) |_{t=0} = d(\psi^{-1} \circ f \circ \varphi) \underbrace{\frac{d}{dt}(\varphi^{-1} \circ \gamma) |_{t=0}}_{\xi} = d(\psi^{-1} \circ f \circ \varphi)(\xi)$$

das heißt df ordnet dem Vektor $\xi \in TM$ (bzgl. Karte φ) den Vektor

$$d(\psi^{-1} \circ f \circ \varphi)(\xi)$$

(bzgl. Karte ψ) zu.

Bemerkung: Für Mannigfaltigkeit (M, φ) , Vektor $[\gamma] \in T_x M$ mit Darstellung ξ bzgl. φ , ist dann nach Gleichung 6 genau

$$d\varphi^{-1}([\gamma]) = \xi \quad \text{mit} \quad d\varphi^{-1} : TM \rightarrow T\mathbb{R}^n$$

denn nach Definition

$$[\gamma] \xrightarrow{d\varphi^{-1}} \underbrace{[\varphi^{-1}(\gamma)]}_{\in T_{\varphi^{-1}(x)}\mathbb{R}^n} \stackrel{(6)}{\cong} \xi$$

2.1.14 Lemma über die Verkettung von df

Es seien $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L$ glatte Abbildungen zwischen den Mannigfaltigkeiten $(M, \psi_m), (N, \psi_n), (L, \psi_l)$. Dann gilt

$$\underbrace{dg \circ df}_{M \rightarrow L} = d(g \circ f)$$

Insbesondere folgt daraus

$$d(f^{-1}) = (df)^{-1}$$

Beweis: Für Vektor $\xi \in T_x M$ ist

$$(dg \circ df)(\xi) = d(\psi_l^{-1} \circ g \circ \psi_n) [d(\psi_n^{-1} \circ f \circ \psi_m)(\xi)] = d(\psi_l^{-1} \circ g \circ f \circ \psi_m)(\xi)$$

das heißt

$$dg \circ df = d(g \circ f)$$

□

Beispiele:

- Für $M = \mathbb{R}^m, N = \mathbb{R}^n, f : M \rightarrow N$ ist $TM \cong \mathbb{R}^m$, das heißt

$$(x, [\gamma]) \cong (x, \dot{\gamma}(x))$$

ist df die gewöhnliche Ableitung aus der reellen Analysis.

- Für $M = B_1^o(0) \subset \mathbb{R}^2$ und $N = S_2$, mit

$$f : M \rightarrow N, f(x) = \left(x_1, x_2, \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2} \right)$$

ist

$$df(x, \dot{\gamma}) = \left(f(x), \frac{d}{dt} f(\gamma) \right)$$

2.2 Äußere Algebra

2.2.1 Definition: 1-Form

Sei V ein \mathbb{R} -Vektorraum. Dann ist eine *1-Form* ω eine lineare Abbildung $\omega : V \rightarrow \mathbb{R}$. Dabei sei V^* der Raum aller 1-Formen auf V , der so genannte *Dualraum* von V . V^* ist tatsächlich ein Vektorraum und es ist $\dim V^* = \dim V$ falls $\dim V < \infty$.

Beispiele:

- Es sei x_1, \dots, x_n eine Basis in V . Dann ist

$$dx^i(\xi) := \xi^i \quad \text{für} \quad \xi = \xi^i x_i$$

eine 1-Form auf V . Es gilt sogar: Die dx^1, \dots, dx^n bilden eine Basis in V , die so genannte *Dualbasis*.

- Für Vektor $F \in \mathbb{R}^n$ (z.B. homogenes Kraftfeld) ist

$$\omega : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \omega(\xi) := \langle \xi, F \rangle$$

eine 1-Form (z.B. Wirkung von F entlang ξ).

2.2.2 Definition: 2-Form

Eine bilineare, schiefsymmetrische Abbildung $\omega^2 : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *2-Form* auf V .

Bemerkung:

- Der Raum $\Lambda^2 V$ aller 2-Formen auf V ist ein linearer Raum.
- Die Schiefsymmetrie ist äquivalent zu

$$\omega(\xi, \xi) = 0 \quad \forall \xi \in V$$

Beispiele:

- Für schiefsymmetrische Matrix $\Omega \in \mathbb{R}^{n \times n}$, das heißt $\Omega^T = -\Omega$ definieren wir

$$\omega^2(\xi, \eta) := \xi^T \Omega \eta$$

Dann ist ω^2 wegen

$$\omega^2(\xi, \eta) = [\omega^2(\xi, \eta)]^T = [\xi^T \Omega \eta]^T = \eta^T \Omega^T \xi = -\omega^2(\eta, \xi)$$

schiefsymmetrisch und somit eine 2-Form auf \mathbb{R}^n .

Bemerkung: Jede 2-Form ω^2 ist wie im Beispiel durch eine schiefsymmetrische Matrix Ω darstellbar, das heißt

$$\forall \omega^2 : \exists \Omega \in \mathbb{R}^{n \times n} : \omega(\xi, \eta) = \xi^T \Omega \eta$$

- Betrachten die Abbildung $S : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, die jedem Paar ξ, η den orientierten Flächeninhalt des durch $\{\xi, \eta\}$ aufgespannten Parallelogramms zuordnet, das heißt

$$S(\xi, \eta) = \text{sgn}(S(\xi, \eta)) \cdot \text{Vol}\{\xi, \eta\} \quad \text{wobei} \quad \text{sgn}(S(\xi, \eta)) = \begin{cases} 1 & : \{\xi, \eta\} \text{ positiv orientiert} \\ -1 & : \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist S eine 2-Form auf \mathbb{R}^2 .

Bemerkung: Es gilt

$$S(\xi, \eta) = \det \begin{pmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{pmatrix}$$

insofern

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

als positiv orientiert festgelegt wird.

- Betrachten ein homogenes Flussfeld v auf \mathbb{R}^3 und definieren ω^2 als die Abbildung die dem Paar $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ den Fluss durch das, durch $\{\xi, \eta\}$ aufgespannte, Parallelogramms pro Zeiteinheit zuordnet. Das heißt $S(\xi, \eta)$ ist das orientierte Volumen des, durch $\{v, \xi, \eta\}$ aufgespannten, Parallelepipeds:

$$S(\xi, \eta) = \det \begin{pmatrix} v_1 & \xi_1 & \eta_1 \\ v_2 & \xi_2 & \eta_2 \\ v_3 & \xi_3 & \eta_3 \end{pmatrix}$$

Somit ist S eine 2-Form.

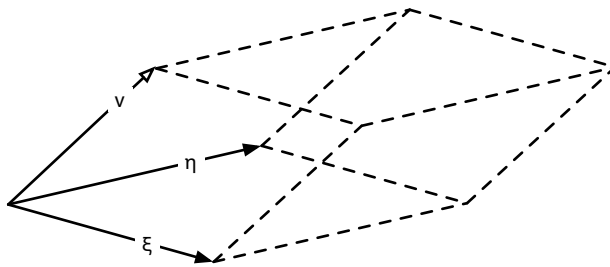


Abbildung 6: Zur Durchflutung des Parallelogramms

Bemerkung: Der Raum $\Lambda^2 V$ aller 2-Formen auf V ist isomorph zum Raum aller schiefsymmetrischen Matrizen, also insbesondere

$$\dim \Lambda^2 V = \frac{n(n-1)}{2}$$

2.2.3 Definition: k-Form

Eine Abbildung $\omega^k : \underbrace{V \times V \times \dots \times V}_{k\text{-mal}} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *k-Form*, falls:

- a) ω^k multilinear
- b) ω^k schiefsymmetrisch

Man nennt $\Lambda^k V$ den (linearen) Raum aller k -Formen auf V .

Bemerkung zur Schiefsymmetrie: ω^k ist definitionsgemäß genau dann schiefsymmetrisch, wenn

$$\omega(\dots, \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{\xi}, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ j}}{\eta}, \dots) = -\omega(\dots, \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{\eta}, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ j}}{\xi}, \dots)$$

Äquivalent dazu ist

$$\forall \sigma \in S_k : \omega^k(\xi_1, \dots, \xi_k) = \chi(\sigma) \cdot \omega(\xi_{\sigma(1)}, \dots, \xi_{\sigma(k)})$$

Beispiel: Die Volumenform

$$\text{Vol}(\xi_1, \dots, \xi_n) := \det \begin{pmatrix} \xi_1^1 & \dots & \xi_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_n^1 & \dots & \xi_n^n \end{pmatrix}$$

ist eine n -Form auf dem n -dimensionalen Vektorraum V . Es gilt sogar:

$$\dim \Lambda^n V = 1$$

das heißt jede n -Form ω ist darstellbar gemäß $\omega = \text{const} \cdot \det(\cdot)$. Für einen Beweis siehe Lineare Algebra.

2.2.4 Definition: Tensorprodukt von k-Formen

Zu k -Form ω und p -Form ζ definiert man das *Tensorprodukt* $\omega \otimes \zeta \in \Lambda^{k+p} V$ gemäß

$$\omega \otimes \zeta(\xi_1, \dots, \xi_k, \eta_1, \dots, \eta_p) := \omega(\xi_1, \dots, \xi_k) \cdot \zeta(\eta_1, \dots, \eta_p)$$

2.2.5 Definition: Wedgeprodukt zweier 1-Formen

Es sei V ein linearer Raum. Definieren die Abbildung $\wedge : V^* \times V^* \rightarrow \Lambda^2 V$ gemäß

$$(\omega^1 \wedge \omega^2)(\xi_1, \xi_2) := \det \begin{pmatrix} \omega^1(\xi_1) & \omega^1(\xi_2) \\ \omega^2(\xi_1) & \omega^2(\xi_2) \end{pmatrix}$$

das heißt

$$\omega^1 \wedge \omega^2 = \omega^1 \otimes \omega^2 - \omega^2 \otimes \omega^1$$

Aufgrund der Linearität und Schiefsymmetrie der Determinante ist tatsächlich $\omega^1 \wedge \omega^2 \in \Lambda^2 V$. Die so gebildete 2-Form nennt man *Wedgeprodukt* oder *Keilprodukt* von ω^1 und ω^2 .

2.2.6 Lemma zur Basis von $\Lambda^2 V$

Es sei V ein n -dimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum und x_1, \dots, x_n eine Basis auf V . Dazu seien dx^1, \dots, dx^n die entsprechende Dualbasis. Dann bilden

$$\{dx^i \wedge dx^j\}_{j>i}$$

eine Basis von $\Lambda^2 V$.

Beweis: Die $dx^i \wedge dx^j$ sind linear unabhängig, denn aus

$$\sum_{j>i} \lambda_{ij} dx^i \wedge dx^j = 0$$

folgt

$$0 = \sum_{j>i} \lambda_{ij} dx^i \wedge dx^j(x_k, x_l) = \sum_{j>i} \lambda_{ij} \det \begin{pmatrix} dx^i(x_k) & dx^i(x_l) \\ dx^j(x_k) & dx^j(x_l) \end{pmatrix} = \sum_{j>i} \lambda_{ij} (\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) \stackrel{k \leq l}{=} \lambda_{kl}$$

Wegen

$$\left| \{dx^i \wedge dx^j\}_{j>i} \right| = \frac{n(n-1)}{2} = \dim \Lambda^2 V$$

bilden sie sogar eine Basis. \square

2.2.7 Definition: Wedgeprodukt mehrerer 1-Formen

Es sei V ein \mathbb{R} -Vektorraum. Zu 1-Formen $\omega^1, \dots, \omega^m$ auf V heißt die m -Form

$$\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^m \in \Lambda^m V$$

definiert durch

$$\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^m(\xi_1, \dots, \xi_m) := \det \begin{pmatrix} \omega^1(\xi_1) & \dots & \omega^1(\xi_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega^m(\xi_1) & \dots & \omega^m(\xi_m) \end{pmatrix}$$

Wedgeprodukt oder *Keilprodukt* von $\omega^1, \dots, \omega^m$.

Bemerke:

- Aufgrund der Multilinearität und Schiefsymmetrie der Determinante ist $\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^m$ tatsächlich eine m -Form.
- Die Zuordnung

$$(\omega^1, \dots, \omega^m) \mapsto \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^m$$

ist eine m -Form auf $(V^*)^m$. Sie ist somit insbesondere schiefsymmetrisch und multilinear.

- Es ist

$$\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^m = \sum_{\sigma \in S_m} \chi(\sigma) \cdot \omega^{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes \omega^{\sigma(m)} \quad (8)$$

(vgl. Eigenschaften der Determinante)

2.2.8 Lemma zur Basis von $\Lambda^m V$

Es sei V ein n -dimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum mit der Basis x_1, \dots, x_n und den dazu Dualen dx^1, \dots, dx^n . Dann bilden für $m \leq n$ die m -Formen

$$\{dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_m}\}_{i_1 < i_2 < \dots < i_m}$$

eine Basis in $\Lambda^m V$. Insbesondere gilt dann

$$\dim \Lambda^m V = \binom{n}{m}$$

Beweis: Lineare Unabhängigkeit: Aus

$$\sum_{i_1 < \dots < i_m} \lambda_{i_1, \dots, i_m} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_m} = 0$$

folgt

$$0 = \sum_{i_1 < \dots < i_m} \lambda_{i_1, \dots, i_m} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_m}(x_{j_1}, \dots, x_{j_m}) = \sum_{i_1 < \dots < i_m} \lambda_{i_1, \dots, i_m} \sum_{\sigma \in S_m} \chi(\sigma) \cdot \delta_{i_{\sigma(1)}j_1} \dots \delta_{i_{\sigma(m)}j_m}$$

$$\sum_{i_1 < \dots < i_m}^{j_1 < \dots < j_m} \lambda_{i_1, \dots, i_m} \delta_{i_1 j_1} \dots \delta_{i_m j_m} = \lambda_{j_1, \dots, j_m}$$

Ferner ist jede m -Form $\omega \in \Lambda^m V$ darstellbar durch

$$\omega = \underbrace{\sum_{i_1 < \dots < i_m} \omega(x_{i_1}, \dots, x_{i_m}) \cdot dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_m}}_{\Omega} \quad (9)$$

denn für $j_1 < \dots < j_m$ ist

$$\Omega(x_{j_1}, \dots, x_{j_m}) \stackrel{\text{analog zu vorhin}}{=} \sum_{i_1 < \dots < i_m} \omega(x_{i_1}, \dots, x_{i_m}) \delta_{i_1 j_1} \dots \delta_{i_m j_m} = \omega(x_{j_1}, \dots, x_{j_m})$$

das heißt Ω und ω stimmen auf der Basis und somit auf ganz V überein. \square

2.2.9 Wedgeprodukt beliebiger k -Formen

Durch die Multilinearität von \wedge und der Darstellungsmöglichkeit von k -Formen über Wedgeprodukte von 1-Formen, ist somit durch Forderung der Assoziativität auch das Wedgeprodukt von beliebigen k -Formen definiert. Für $\omega^i \in \Lambda^{k_i} V$, $i = 1, \dots, N$ mit den Darstellungen

$$\omega^i = \sum_{(j_1, \dots, j_{k_i}) \in J_i} a_{j_1 \dots j_{k_i}}^i dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{k_i}}$$

ist somit

$$\begin{aligned} \bigwedge_{i=1}^N \omega^i &= \left[\sum_{(j_1, \dots, j_{k_1}) \in J_1} a_{j_1 \dots j_{k_1}}^1 dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{k_1}} \right] \wedge \dots \wedge \left[\sum_{(j_1, \dots, j_{k_N}) \in J_N} a_{j_1 \dots j_{k_N}}^N dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{k_N}} \right] \\ &= \sum_{j^1 \in J_1} \dots \sum_{j^N \in J_N} a_{j_1^1 \dots j_{k_1}^1}^1 \dots a_{j_1^N \dots j_{k_N}^N}^N dx^{j_1^1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{k_N}^1} \wedge \dots \wedge dx^{j_1^N} \wedge \dots \wedge dx^{j_{k_N}^N} \end{aligned}$$

2.2.10 Definition: Vektorfeld

Es sei M eine C^∞ Mannigfaltigkeit. Eine Abbildung $X : M \rightarrow TM$ heißt *Vektorfeld* auf M , falls

- a) X glatt
- b) $X(a) =: X_a \in T_a M$

Dabei sei \mathcal{X} der (\mathcal{F} -lineare) Raum aller Vektorfelder auf M .

Beispiel: Für $M = \mathbb{R}^n$ und $TM = \underbrace{\mathbb{R}^n}_M \times \underbrace{\mathbb{R}^n}_{T_M \mathbb{R}^n}$ ist $X \in TM$ ein Vektorfeld im klassischen Sinne.

2.2.11 Definition: 1-Differentialform

Eine *1-Differentialform* $\omega : TM \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine glatte Abbildung (vgl. 2.1.12), mit

$$\omega|_x \in (T_x M)^*$$

das heißt ω wirkt auf $(x, \xi) \in TM$ wie eine 1-Form in $T_x M$ bzgl. ξ .

2.2.12 Definition: 1-Differentialform (Alternative)

Eine \mathcal{F} -lineare Abbildung $\omega : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{F}$ heißt *1-Differentialform* (oder einfach *k-Form*) auf M (vgl. Lemma 2.2.14).

2.2.13 Definition: k-Differentialform

Eine \mathcal{F} -multilineare, schiefsymmetrische Abbildung $\omega : \underbrace{\mathcal{X} \times \dots \times \mathcal{X}}_{k \text{ mal}} \rightarrow \mathcal{F}$ heißt *k-Differentialform* (oft auch *k-Form*) auf M .

Man nennt

$$\Lambda^k M$$

den (\mathcal{F} -linearen) Raum aller *k-Differentialformen* auf M .

2.2.14 Lemma über die Operation von k-Formen

Es sei $\omega : \mathcal{X}^k \rightarrow \mathcal{F}$ eine *k-Differentialform* auf M und X_1, \dots, X_k beliebige Vektorfelder auf M . Dann hängt

$$\underbrace{\omega(X_1, \dots, X_k)(a)}_{\in \mathcal{F}}$$

für jeden Punkt $a \in M$ **nur** von den Werten X_{1_a}, \dots, X_{k_a} der Felder in a ab.

- Insbesondere ist

$$\omega(X_1, \dots, X_k)(a) = 0$$

falls mindestens ein Vektorfeld in a dem Nullvektor entspricht.

- Aufgrund der Tatsache dass $\omega(X_1, \dots, X_k)$ als skalares Feld an jedem Punkt $a \in M$ nur von den Werten X_{i_a} abhängt, kann man ω auch als Abbildung

$$\omega : M \rightarrow \Lambda^k TM, \quad \omega(a) \in \Lambda^k T_a M$$

identifizieren: Für beliebige Vektoren $x_1, \dots, x_k \in T_a M$ wäre

$$\omega(a)(x_1, \dots, x_k) = \omega(X_1, \dots, X_k)(a)$$

wobei die X_i (beliebige) Fortsetzungen der x_i zu Vektorfeldern sind.

Beweis: O.B.d.A betrachten wir 1-Form ω . Es sei $X \in \mathcal{X}$ ein Vektorfeld in M , so dass $X_a = 0$ ist. Dabei seien $e_1, \dots, e_k \in \mathcal{X}$ Basisvektorfelder, das heißt $e_{i_a} \in T_a M$ standard-Basisvektor in $T_a M$. Da sowohl die Karte als auch X glatt sind, existieren glatte skalare Felder f^i mit

$$X = f^i e_i$$

wobei $f^i(a) = 0$ sind. Aufgrund der \mathcal{F} -Homogenität von ω folgt dann

$$\omega(X) = \omega(f^i e_i) = f^i \omega(e_i) \Rightarrow \omega(X)(a) = \underbrace{f^i(a)}_0 \omega(e_i)(a) = 0$$

Sind nun $X, Y \in \mathcal{X}$ beliebige Vektorfelder mit $X_a = Y_a$ so folgt

$$\omega(X)(a) - \omega(Y)(a) = \omega(X - Y)(a) \stackrel{(X-Y)_a=0}{=} 0$$

□

2.2.15 Definition: df für skalares Feld $f \in \mathcal{F}$

Für skalare Funktion $f \in \mathcal{F}$ ist df , definiert durch

$$df(v(x)) := d_x f(v(x)) := d_{\varphi^{-1}(x)} (f \circ \varphi) \left(\underbrace{v(x)}_{\substack{\text{nach} \\ \text{1. Def} \\ \text{bzgl. } \varphi}} \right)$$

eine 1-Differentialform.

Bemerke: Im Kontext von Definition 2.1.13, ist hier $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, wobei $TR \cong R$, $\psi = \text{Id}$ ist.

2.2.16 Einschränkung von 1-Formen auf Tangentialräume

Sei $x \in M$ fest. Dann ist für 1-Differentialform ω auf M , die Abbildung $\omega|_x : T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\omega|_x(\xi) := \omega(x, \xi) \quad \text{nach Def. (2.2.11)}$$

bzw.

$$\omega|_x(v(x)) := \omega(v)(x) \quad \text{nach Def. (2.2.12)}$$

eine 1-Form auf $T_x M$.

Bemerke: Letztere Darstellung ist möglich, da jeder Vektor $\xi \in T_x M$ zu einem Vektorfeld $v \in \mathcal{X}$ fortgesetzt werden kann.

2.2.17 Definition: Die 1-Formen dx^i

Es sei (M, ψ_1) eine n -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit, $x \in M$ und dazu Karte ψ_1 . Dann schreibt man

$$x^i := [\psi_1^{-1}(x)]^i$$

für die jeweilige Komponente von $\psi_1^{-1}(x) \in \mathbb{R}^n$, und es gilt $(x \mapsto x^i) \in \mathcal{F}$. Man nennt die Felder x^1, \dots, x^n *Koordinaten* auf M . Man definiert die 1-Differentialformen $dx^i : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{F}$ gemäß

$$dx^i := d(x \mapsto x^i)$$

(vgl. Def. 2.2.15). Das heißt für Vektor v bzgl. Karte ψ_2 (1. Def.):

$$dx^i(v) := d(x^i \psi_2)(v) = d \underbrace{(\psi_1^{-1} \circ \psi_2)^i}_{\substack{\text{klassisches} \\ \text{skalares} \\ \text{Feld}}}(v) \quad (10)$$

Bemerke:

- Für skalares Feld $f \in \mathcal{F}(M)$ folgt dann die Darstellung

$$df = \frac{\partial(f \circ \psi_1)}{\partial x^i} dx^i \cong \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \quad (11)$$

- Für Vektor ξ bzgl. ψ_1 folgt

$$dx^i(\xi) = \xi^i \quad (12)$$

- Schreiben für Mannigfaltigkeit M mit der Karte ψ und dazu Koordinaten x^i oft (M, ψ, x^i) .

- Für Abbildung $f : (M, \psi_m, x^i) \rightarrow (N, \psi_n, y^j)$ werden wir oft schreiben $f^i := (\psi_n^{-1} \circ f)^i$ bzw. $\frac{\partial f^i}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j} (\psi_m^{-1} \circ f \circ \psi_n)^i$

Beispiel: Für

$$M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \varphi(\rho, \vartheta) = \begin{pmatrix} \rho \cos \vartheta \\ \rho \sin \vartheta \end{pmatrix}, \psi(y^1, y^2) = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix}$$

ist bzgl. $\varphi : x^1 = \rho, x^2 = \vartheta \in \mathcal{F}$ und somit

$$d\rho = d_y \rho(y^1, y^2) \cong \left(\frac{\partial \rho}{\partial y^1}, \frac{\partial \rho}{\partial y^2} \right)$$

Für Vektor $\xi = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix}$ bzgl. Karte ψ ist dann

$$d\rho(\xi) = \frac{\partial \rho}{\partial y^1} \xi^1 + \frac{\partial \rho}{\partial y^2} \xi^2$$

2.2.18 Lemma über die Darstellung von Differentialformen

Jede k -Differentialform $\omega \in \Lambda^k M$ auf einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit (M, x^i) ist darstellbar als

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

wobei die dx^i die durch die Koordinaten erzeugten 1-Formen auf M sind (vgl. Def. 2.2.17). Da ω glatt ist, sind auch die a_{i_1, \dots, i_k} glatt als Funktionen $a_{i_j} \in \mathcal{F}$.

Bemerke: Speziell für $k = n$ ist jede n -Form ω^n darstellbar durch

$$\omega = \varphi \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

2.3 Zurückgezogene Form

2.3.1 Definition: Zurückgezogene Form

Es sei $f : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung zwischen den Mannigfaltigkeiten M, N , $m = \dim M, n = \dim N$. Sei $\omega \in \Lambda^k N$ eine k -Form auf N . Dann heißt die k -Form $f^* \omega \in \Lambda^k M$ definiert durch

$$(f^* \omega)_a(\xi_1, \dots, \xi_k) := \omega_{f(a)}(d_x f(\xi_1), \dots, d_x f(\xi_k))$$

zurückgezogene Form von ω auf M .

2.3.2 Satz über die zurückgezogene Form

Es sei $f : M \rightarrow N$ glatt, und $\omega \in \Lambda^k N$ (vgl. Def. 2.3.1). Dann gilt:

a) $f^*\omega$ ist tatsächlich eine k -Form auf M

b) Die Operation $f^* : \Lambda^k N \rightarrow \Lambda^k M$ ist $\mathcal{F}(N)$ -linear, das heißt für Funktionen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{F}(N)$ und k -Formen $\omega^1, \omega^2 \in \Lambda^k N$ ist

$$f^*(\lambda_1\omega^1 + \lambda_2\omega^2) = (\lambda_1 \circ f) \cdot f^*\omega^1 + (\lambda_2 \circ f) \cdot f^*\omega^2$$

c) Für Formen $\omega^1 \in \Lambda^k M$, $\omega^2 \in \Lambda^l M$ ist

$$f^*(\omega^1 \wedge \omega^2) = f^*\omega^1 \wedge f^*\omega^2$$

d) Für glatte Abbildungen

$$L \xrightarrow{g} M \xrightarrow{f} N$$

zwischen den Mannigfaltigkeiten L, M, N ist

$$(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$$

2.3.3 Spezialfall: f^*g für skalares Feld g

Es sei $f : M \rightarrow N$ glatt und $g \in C^\infty(N)$ eine 0-Form auf N . Dann ist nach Definition

$$f^*g = g \circ f$$

2.3.4 Die Form f^*dQ

Es sei $Q : N \rightarrow \mathbb{R}$ ein glattes skalares Feld auf der n -dimensionalen Mannigfaltigkeit N und $f : M \rightarrow N$ glatt. Dann ist bekanntlich $dQ \in \Lambda^1 N$ eine 1-Form auf N . Deren Zurückgezogene f^*dQ ergibt sich dann nach Lemma 2.1.14:

$$(f^*dQ)(\xi) = dQ \circ d_x f \stackrel{(2.1.14)}{=} d(Q \circ f)$$

2.3.5 Die Formen f^*dy^i

Es sei $f : (M, \psi_m, x^i) \rightarrow (N, \psi_n, y^i)$ eine glatte Abbildung zwischen den Mannigfaltigkeiten M, N . Dann ist

$$\underbrace{f^*dy^i}_{\in \Lambda^1 M} \stackrel{(2.3.4)}{=} d \underbrace{(y^i \circ f)}_{\substack{f^i \\ \in \mathcal{F}(M)}} \stackrel{(11)}{=} \frac{\partial f^i}{\partial x^j} dx^j$$

das heißt

$$\boxed{f^*dy^i = \frac{\partial f^i}{\partial x^j} dx^j, \quad f^i := (\psi_n^{-1} \circ f \circ \psi_m)^i} \quad (13)$$

Spezialfall: Für Karte ψ mit Koordinaten x^i ist

$$\psi^*dx^i = \frac{\partial(\psi^{-1} \circ \psi)^i}{\partial x^j} dx^j = \underbrace{\frac{\partial x^i}{\partial x^j}}_{\delta_j^i} dx^j = dx^i \in \Lambda^1 \mathbb{R}^n \quad (14)$$

2.3.6 Spezialfall: Koordinatentransformationen

Es sei M ausgestattet mit zwei Karten $(\psi_1, x^j), (\psi_2, y^i)$. Dann ist

$$\boxed{\text{Id}^* dy^i = dy^i \stackrel{(2.3.5)}{=} \frac{\partial y^i}{\partial x^j} dx^j, \quad y^i := (\psi_2^{-1} \circ \psi_1)^i} \quad (15)$$

lediglich eine Darstellung der dy^i durch die dx^i (Koordinatentransformation)!

2.3.7 Darstellung von $f^*\omega$ für 1-Form ω

Es sei $f : (M, \psi_m, x^i) \rightarrow (N, \psi_n, y^j)$ eine glatte Abbildung zwischen den Mannigfaltigkeiten M, N . Ferner sei $\omega \in \Lambda^1 N$ (vgl. 2.2.17) eine 1-Form auf N mit der Darstellung

$$\omega = a_i dy^i$$

Dann ist nach Abschnitt 2.3.5 und Eigenschaften 2.3.2 von f^* :

$$f^*\omega \stackrel{(2.3.2)}{=} (a_i \circ f) \cdot f^* dy^i \stackrel{(2.3.5)}{=} (a_i \circ f) \cdot \frac{\partial f^i}{\partial x^j} dx^j \quad (16)$$

Beispiel: Betrachten die Mannigfaltigkeit $M = N = \mathbb{R}^2$ und die Transformation

$$(r, \varphi)(x) = \psi_n^{-1} \circ \psi_m^{-1}(x) := \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \arctan \frac{x_2}{x_1} \right)$$

Dann ist

$$\text{Id}^* [r^2 dr + r\varphi d\varphi] = r^2 \text{Id}^* dr + r\varphi \text{Id}^* d\varphi$$

$$\stackrel{(15)}{=} (x_1^2 + x_2^2) \left[\frac{\partial \sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{\partial x_1} dx^1 + \frac{\partial \sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{\partial x_2} dx^2 \right] + \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \cdot \arctan \frac{x_2}{x_1} \cdot \left[\frac{\partial \arctan \frac{x_2}{x_1}}{\partial x_1} dx^1 + \frac{\partial \arctan \frac{x_2}{x_1}}{\partial x_2} dx^2 \right]$$

2.3.8 Darstellung von $f^*\omega$ für k-Form ω

Es sei $f : (M, \psi_m, x^i) \rightarrow (N, \psi_n, y^j)$ eine glatte Abbildung zwischen den m - bzw. n -dimensionalen Mannigfaltigkeiten M und N . Eine k -Form $\omega \in \Lambda^k N$ besitze die Darstellung

$$\omega = \sum_{(j_1, \dots, j_k) \in J} a_{j_1, \dots, j_k} dy^{j_1} \wedge \dots \wedge dy^{j_k}$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} f^*\omega &\stackrel{(2.3.2)}{=} \sum_{j \in J} (a_{j_1, \dots, j_k} \circ f) \cdot f^* dy^{j_1} \wedge f^* dy^{j_2} \wedge \dots \wedge f^* dy^{j_k} \\ &\stackrel{(2.3.5)}{=} \sum_{j \in J} (a_{j_1, \dots, j_k} \circ f) \cdot \frac{\partial f^{j_1}}{\partial x^{i_1}} \cdot \dots \cdot \frac{\partial f^{j_k}}{\partial x^{i_k}} \cdot dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \end{aligned}$$

wobei $f^i := (\psi_n^{-1} \circ f \circ \psi_m)^i$.

Beispiel: Betrachten die Mannigfaltigkeit $(\mathbb{R}^3, \text{Id}, x^i)$ mit dem Vektorfeld A . Definieren die 2-Form

$$\omega(\xi, \eta) := \det \begin{pmatrix} A^1 & A^2 & A^3 \\ \xi^1 & \xi^2 & \xi^3 \\ \eta^1 & \eta^2 & \eta^3 \end{pmatrix} = \langle A, \xi \times \eta \rangle$$

das heißt

$$\omega = A^1 dx^2 \wedge dx^3 + A^2 dx^3 \wedge dx^1 + A^3 dx^1 \wedge dx^2$$

Betrachten nun die glatte Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ und die dazu zurückgezogene $f^*\omega$. Dann ist

$$\begin{aligned} f^*\omega &= (A^1 \circ f) \cdot \underbrace{\frac{\partial f^2}{\partial x^i} \frac{\partial f^3}{\partial x^j} dx^i \wedge dx^j}_{\substack{\text{für } i=j \\ 0}} + (A^2 \circ f) \cdot \frac{\partial f^3}{\partial x^i} \frac{\partial f^1}{\partial x^j} dx^i \wedge dx^j + (A^3 \circ f) \cdot \frac{\partial f^1}{\partial x^i} \frac{\partial f^2}{\partial x^j} dx^i \wedge dx^j \\ &= \sum_{i < j} \left[\frac{\partial f^2}{\partial x^i} \frac{\partial f^3}{\partial x^j} - \frac{\partial f^2}{\partial x^j} \frac{\partial f^3}{\partial x^i} \right] dx^i \wedge dx^j \\ &= \det \left(\frac{\partial(f^2, f^3)}{\partial(x^i, x^j)} \right) \\ &= \sum_{i < j} \left[(A^1 \circ f) \cdot \det \left(\frac{\partial(f^2, f^3)}{\partial(x^i, x^j)} \right) + (A^2 \circ f) \cdot \det \left(\frac{\partial(f^3, f^1)}{\partial(x^i, x^j)} \right) + (A^3 \circ f) \cdot \det \left(\frac{\partial(f^1, f^2)}{\partial(x^i, x^j)} \right) \right] \cdot dx^i \wedge dx^j \end{aligned}$$

2.3.9 Spezialfall: $f^*\omega$ für n -Form ω

Es sei $f : (M, \psi_m, x^i) \rightarrow (N, \psi_n, y^j)$ eine glatte Abbildung zwischen den n -dimensionalen Mannigfaltigkeiten M, N und $\omega \in \Lambda^n N$ eine n -Form auf N mit der Darstellung

$$\omega = \Omega \cdot dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n, \quad \Omega \in \mathcal{F}(N)$$

Dann ergibt sich nach Abschnitt 2.3.8

$$\begin{aligned} f^*\omega &= (\Omega \circ f) \cdot \frac{\partial f^1}{\partial x^{i_1}} \cdot \dots \cdot \frac{\partial f^n}{\partial x^{i_n}} \cdot \underbrace{dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_n}}_{\substack{0 \\ \text{für} \\ i_j = i_k, j \neq k}} = (\Omega \circ f) \cdot \sum_{\sigma \in S_n} \frac{\partial f^1}{\partial x^{\sigma(1)}} \cdot \dots \cdot \frac{\partial f^n}{\partial x^{\sigma(n)}} \cdot \underbrace{dx^{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge dx^{\sigma(n)}}_{\chi(\sigma) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n} \\ &= (\Omega \circ f) \cdot \underbrace{\sum_{\sigma \in S_n} \chi(\sigma) \prod_{j=1}^n \frac{\partial f^j}{\partial x^{\sigma(j)}}}_{\det \left(\frac{\partial f^j}{\partial x^i} \right)} \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = (\Omega \circ f) \cdot \underbrace{\det \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)}_{\det \left[\frac{\partial(\psi_n^{-1} f \psi_m)}{\partial x} \right]} \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \end{aligned} \quad (17)$$

2.4 Integration von Differentialformen

2.4.1 Motivation

Kurvenintegrale: Es sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve und ω eine 1-Form auf \mathbb{R}^3 . Zerlegen das Intervall $[0, 1]$ in N Teilintervalle $[t_i, t_{i+1}]$, $t_0 = 0$, $t_N = 1$ und nennen

$$\int_{\gamma} \omega := \int_0^1 \omega[\dot{\gamma}(t)] dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \omega^1(\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i))$$

Analoge Überlegungen lassen sich zwar auch für Mannigfaltigkeiten M höherer Dimension durchführen, doch sind sie sehr Problemanfällig und setzen oft zu hohe Voraussetzungen an M . Eine kompliziertere Definition ist somit notwendig.

2.4.2 Definition: Integration über Polyeder

Betrachten ein k -dimensionales Polyeder¹ D und die k -Form ω auf D , mit der Darstellung

$$\omega = \varphi \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k$$

Dabei sei D standard-orientiert. Man definiert

$$\int_D \omega := \int_D \varphi dx^1 \dots dx^k$$

2.4.3 Lemma über die Integration über Polyeder

Es seien $D_1, D_2 \in \mathbb{R}^n$ zwei Polyeder, $f : \text{int}(D_1) \rightarrow \text{int}(D_2)$ glatt und bijektiv und ω eine n -Form auf D_2 . Dann gilt

$$\int_{D_1} f^* \omega = \int_{D_2} \omega$$

Beweis: ω besitze die Darstellung

$$\omega = \varphi \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

Dann folgt nach Abschn. 2.3.9

$$\int_{D_1} f^* \omega = \int_{D_1} (\varphi \circ f) \cdot \det \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) dx^1 \dots dx^n = \int_{f(D_1)} \varphi dx^1 \dots dx^n = \int_{D_2} \omega$$

□

2.4.4 Definition: Singulärer Simplex

Ein Triplet $(D, f : D \rightarrow M, \varepsilon)$, bestehend aus einem k -dimensionalen Polyeder $D \subset \mathbb{R}^n$, einer glatten Abbildung f von D auf eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit M und der jeweiligen Basis-Orientierung ε in D , nennen wir *singulären Simplex* oder *k -Simplex*.

2.4.5 Definition: Kette

Für ganze Zahlen $m_1, \dots, m_N \in \mathbb{Z}$ und singuläre k -Simplizes $\sigma_i = (D_i, f_i : D_i \rightarrow M_i, \varepsilon_i)$, $i = 1, \dots, N$ nennen wir eine *k -Kette* (aus singulären Simplizes) einen (formalen) Ausdruck der Form

$$m_1 \sigma_1 + \dots + m_N \sigma_N$$

Die Menge $(\mathcal{K}, +, \cdot)$ aller solcher Ketten, sei ausgestattet mit

$$(m_1 \sigma_1 + \dots + m_N \sigma_N) + (\mu_1 \sigma_1 + \dots + \mu_M \sigma_M) := m_1 \sigma_1 + \dots + m_N \sigma_N + \mu_1 \sigma_1 + \dots + \mu_M \sigma_M$$

$$\mu \cdot (m_1 \sigma_1 + \dots + m_N \sigma_N) := (\mu m_1) \cdot \sigma_1 + \dots + (\mu m_N) \cdot \sigma_N$$

und der Festlegung

$$m_1 \sigma_1 = m_2 \sigma_2 \quad :\Leftrightarrow \quad (m_1 = m_2 = 0) \vee (m_1 = m_2 \wedge \sigma_1 = \sigma_2) \vee (m_1 = -m_2 \wedge \sigma_1 = -\sigma_2)$$

$$\text{wobei } -(D, f, \varepsilon) := \underbrace{(D, f, -\varepsilon)}_{\substack{\text{andere} \\ \text{Orientierung}}}$$

Sie bilde ein \mathbb{Z} -links-Modul, das heißt es gelte:

¹Polyeder: Konvexe Hülle endlich vieler Punkte. O.B.d.A kann man sich $D \subset \mathbb{R}^k$ vorstellen.

- $(\mathcal{K}, +)$ ist eine Abelsche Gruppe, mit dem neutralen Element $0 \cdot \sigma$ (für ein beliebiges σ).
- Für $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ und Kette $\varkappa \in \mathcal{K}$ ist $m_1 \cdot (m_2 \cdot \varkappa) = (m_1 m_2) \cdot \varkappa$
- Für $m \in \mathbb{Z}$ und Ketten $\varkappa_1, \varkappa_2 \in \mathcal{K}$ ist $m \cdot (\varkappa_1 + \varkappa_2) = m \cdot \varkappa_1 + m \cdot \varkappa_2$
- Für $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ und Kette $\varkappa \in \mathcal{K}$ ist $(m_1 + m_2) \cdot \varkappa = m_1 \cdot \varkappa + m_2 \cdot \varkappa$
- Für Kette $\varkappa \in \mathcal{K}$ ist $1 \cdot \varkappa = \varkappa$

Bemerkung: Oft werden die M_i für die singulären Simplexes σ_i einer Kette $\varkappa \in \mathcal{K}$ gleich sein.

2.4.6 Definition: Rand eines k -Simplex

Es sei $\sigma = (D, f : D \rightarrow M, \varepsilon)$ ein singulärer k -Simplex, mit den N Facetten ($(k-1)$ -Seiten) D_i (wiederum $(k-1)$ -dim. Polyeder). Dabei sei auf jeder Facette eine Basis (e_1, \dots, e_{k-1}) als *positiv orientiert* erklärt, falls (n, e_1, \dots, e_{k-1}) in D positiv war, wobei n der äußere Normalenvektor auf die Facette sei.

Dann definiert man den *Rand* $\partial\sigma$ von σ als die $(k-1)$ -Kette

$$\partial\sigma := \sum_{i=1}^N (D_i, f|_{D_i} \rightarrow M, \varepsilon_i)$$

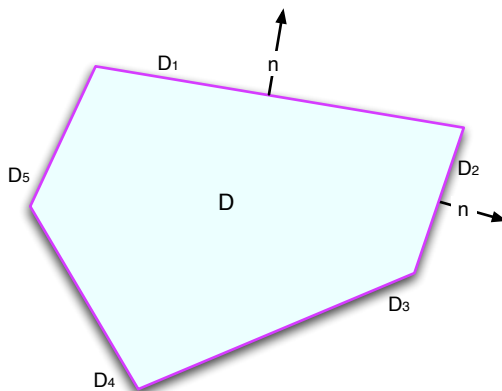


Abbildung 7: Zum Rand eines 2-Simplex mit 5 Facetten

2.4.7 Definition: Rand einer k -Kette

Es sei

$$\varkappa = \sum_j m_j \sigma_j$$

eine k -Kette. Dann ist die $(k-1)$ -Kette

$$\partial\varkappa := \sum_j m_j \cdot \partial\sigma_j$$

der so genannte *Rand* von \varkappa .

Bemerkung:

- Für k -Polyeder D sind seine Facetten D_i $(k-1)$ -Polyeder.
- Für Ketten $\varkappa_1, \dots, \varkappa_N$ ist natürlich

$$\partial \sum_i m_i \varkappa_i = \sum_i m_i \partial \varkappa_i$$

2.4.8 Lemma über den Rand von Ketten

Es sei \varkappa eine k -Kette. Dann gilt

$$\partial\partial\varkappa = 0$$

Beweis: Per Konstruktion genügt es die Aussage für einen einzigen k -Simplex zu beweisen. Für k -Simplex $\sigma = (D, f, \varepsilon)$ mit

$$\partial\sigma = \sum_{i=1}^N (D_i, f|_{D_i}, \varepsilon_i)$$

ist jede unter-Facette d_i^j der Facette D_i auch unter-Facette einer anderen Facette D_k , $k \neq i$, jedoch mit der umgekehrten Orientierung (vgl. Abbildung 8), das heißt

$$\partial\partial\sigma = \sum_i \partial(D_i, f, \varepsilon_i) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N_i} \underbrace{(d_i^j, f, \varepsilon_i^j)}_{\substack{(d_i^j, f, -\varepsilon_k^l) \\ \text{für irgendein} \\ k \neq i}} = 0$$

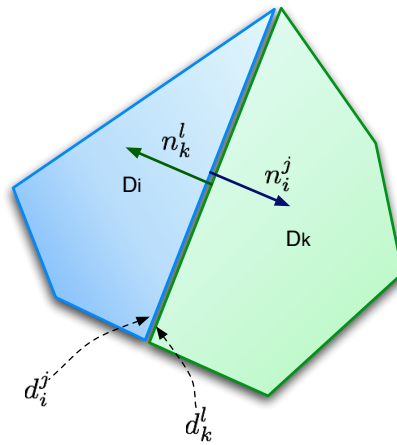


Abbildung 8: Zum Rand $\partial\partial\sigma$.

Die unter-Facetten *heben sich* sozusagen *gegenseitig auf*.

□

2.4.9 Definition: Integration über Ketten

Es sei

$$\varkappa = m_1\sigma_1 + \dots + m_N\sigma_N, \quad \sigma_i = (D_i \subset \mathbb{R}^k, f_i : D_i \rightarrow M, \varepsilon_i)$$

eine k -Kette und $\omega \in \Lambda^k M$ eine k -Form auf der n -dimensionalen Mannigfaltigkeit M . Dann definieren wir

$$\int_{\varkappa} \omega := \sum_{i=1}^N m_i \int_{D_i} f_i^* \omega$$

Bemerkung: Weder muss $n = k$ sein, noch müssen die f_i injektiv sein.

2.4.10 Spezialfall der Integration: Der Simplex als Mannigfaltigkeit

Für k -Simplex $\sigma = (D, \text{Id} : D \rightarrow D, \varepsilon)$ und $\omega \in \Lambda^k D$ geht das Integral in den ursprünglichen Integralbegriff auf D (2.4.2) über:

$$\underbrace{\int_{\sigma} \omega}_{\text{neu}} \stackrel{\text{def.}}{=} \int_D \underbrace{\text{Id}^* \omega}_{\omega} = \underbrace{\int_D \omega}_{\text{alt}}$$

2.4.11 Transformationen bei Integration über Ketten

Es sei

$$\varkappa = \sum_{i=1}^N m_i \sigma_i \quad \text{mit} \quad \sigma_i = (D_i, f : D_i \rightarrow M, \varepsilon_i)$$

eine k -Kette, dazu

$$\{g_j : G_j \rightarrow D_j\}_{j=1}^N$$

eine Familie von Diffeomorphismen zwischen den Polyedern G_j und D_j mit $f(\text{int}(G_j)) = \text{int}(D_j)$. Dann gilt für die dadurch induzierte k -Kette

$$\zeta := \sum_{j=1}^N m_j (G_j, f \circ g_j, \varepsilon_j)$$

und k -Form $\omega \in \Lambda^k M$:

$$\int_{\zeta} \omega = \int_{\varkappa} \omega$$

Bemerkung: Somit ist das Integral über einen Simplex (D, f, ε) invariant gegenüber diffeomorphen Simplexes.

Beweis:

$$\int_{\zeta} \omega \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{j=1}^N \int_{G_j} (f \circ g_j)^* \omega = \sum_{j=1}^N \int_{G_j} g_j^* \circ f^* \omega \stackrel{(2.4.3)}{=} \sum_{j=1}^N \int_{D_j} f^* \omega = \int_{\varkappa} \omega$$

□

2.4.12 Spezialfall der Integration: Flächen im \mathbb{R}^n

Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine m -dimensionale Fläche parametrisiert durch den Diffeomorphismus $\psi : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M$, dazu skalares Feld $F : M \rightarrow \mathbb{R}$. Zu klären wäre, wie sich die abstrakte Definition der Integration mit dem klassischen, aus der Analysis bekannten Begriff, verträgt.

Betrachten M als m -dimensionale Mannigfaltigkeit mit der Karte (ψ, U) in den Koordinaten y^1, \dots, y^m , dazu den m -Simplex

$$\sigma := (D \subset \mathbb{R}^m, f : D \rightarrow M, \text{std})$$

mit f als Diffeomorphismus. Dann gilt für die m -Form

$$\omega = \left[\text{gr} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \circ \psi^{-1} \right] \cdot F \, dy^1 \wedge \dots \wedge dy^m \in \Lambda^m M, \quad F \in \mathcal{F}(M)$$

auf M :

$$\boxed{\int_{\underbrace{\sigma}_{\text{nach Def. 2.4.9}}} \omega = \int_{\underbrace{M}_{\text{klassisches Flächenintegral}}} F}$$

(18)

Verallgemeinernde Folgerung: Klassische Lebesque-Integrale von Funktionen bzw. Vektorfeldern über Flächen/Volumina M (parametrisiert durch $\psi : U \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$), die in die Form

$$\int_U F(y^1, \dots, y^n) dy^1 \dots dy^n, \quad F : U \rightarrow \mathbb{R}$$

gebracht werden können, lauten in unserem Kontext dann

$$\int_\sigma (F \circ \psi^{-1}) dy^1 \wedge \dots \wedge dy^m$$

Erläuterung: Schreiben

$$\int_\sigma \omega \stackrel{\text{def}}{=} \int_D f^* \omega \stackrel{(2.3.9)}{=} \int_D \left[\text{gr} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \circ \psi^{-1} \circ f \right] \cdot (F \circ f) \cdot \det \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j} \right) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$$

$$= \int_D \left[\text{gr} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \circ \psi^{-1} \circ f \right] \cdot (F \circ f) \cdot \det \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j} \right) dx^1 \dots dx^m$$

$$\stackrel{D=(f^{-1} \circ \psi)(U)}{=} \int_U \left[\text{gr} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \circ \psi^{-1} \circ f \circ f^{-1} \circ \psi \right] \cdot (F \circ f \circ f^{-1} \circ \psi) \cdot \det \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j} (f^{-1} \circ \psi) \right) \cdot \det \left(\frac{\partial (f^{-1} \circ \psi)}{\partial y} \right) dy^1 \dots dy^m$$

$$= \int_U \text{gr} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \cdot (F \circ \psi) \cdot \det \left(\frac{\partial (\psi^{-1} \circ f)}{\partial x} (f^{-1} \circ \psi) \cdot \frac{\partial (f^{-1} \circ \psi)}{\partial y} \right) dy^1 \dots dy^m$$

$$= \int_U \text{gr} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \cdot (F \circ \psi) \cdot \underbrace{\det \left(\frac{\partial (\psi^{-1} \circ f \circ f^{-1} \circ \psi)}{\partial y} \right)}_1 dy^1 \dots dy^m$$

$$= \int_U (F \circ \psi) \cdot \text{gr} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dy^1 \dots dy^m \stackrel{\text{def}}{=} \int_M F$$

Beispiel: Für Vektorfeld $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ und Fläche $M = \psi(U)$, $U = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ parametrisiert durch Kugelkoordinaten

$$\psi(\vartheta, \varphi) = (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta)$$

wäre klassisch

$$\int_M \mathbf{F} d\mathbf{A} = \int_U \sin \vartheta \cdot (\mathbf{F} \circ \psi)(\vartheta, \varphi) \cdot \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} d\vartheta d\varphi$$

und in unserem Kontext

$$\int_M \mathbf{F} d\mathbf{A} \cong \int_U \sin \vartheta \cdot \mathbf{F} \cdot \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} d\vartheta \wedge d\varphi$$

2.4.13 Definition: Verallgemeinerung der Integrationsgebiete

Es sei M eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit, $\omega \in \Lambda^k M$ eine k -Form auf M , $U \subset \mathbb{R}^k$ eine beschränkte Menge, ausgestattet mit $\psi : U \rightarrow M$ und einer Orientierung. Dann schreibt man

$$\int_U \omega := \int_U \psi^* \omega$$

Bemerke:

- Im Falle dass (U, ψ, ε) ein k -Simplex ist, geht diese Definition in die alte über.
- Der Rand $\partial U \cong (\partial U, \psi|_{\partial U}, \varepsilon')$ von U bildet sich analog zu den Simplizes.

2.5 Differentiation auf Mannigfaltigkeiten

2.5.1 Satz über die Integration auf Rändern

Es sei $\omega \in \Lambda^k M$ eine k -Form auf der n -dimensionalen Mannigfaltigkeit (M, φ) . Zu Vektoren $\xi_1, \dots, \xi_{k+1} \in T_x M$ betrachten für $\varepsilon \geq 0$ das Parallelepiped

$$\varepsilon\Pi := \{\varphi^{-1}(x) + \varepsilon\lambda_1 d\varphi^{-1}(\xi_1) + \dots + \varepsilon\lambda_{k+1} d\varphi^{-1}(\xi_{k+1}) \mid \lambda_i \in [0, 1]\} \subset \mathbb{R}^n$$

als $(k+1)$ -Simplex, mit $\varphi : \varepsilon\Pi \rightarrow M$ und Standard-Orientierung. Dann existiert eine eindeutig bestimmte $(k+1)$ -Form $\Omega \in \Lambda^{k+1} M$ so dass für beliebige $\xi_1, \dots, \xi_{k+1} \in T_x M$ gilt

$$\int_{\partial\varepsilon\Pi} \omega = \varepsilon^{k+1} \Omega(\xi_1, \dots, \xi_{k+1}) + \mathcal{O}(\varepsilon^{k+1})$$

Beweis: Siehe Satz 2.5.4.

Bemerke: Ω hängt nicht von der speziellen Karte φ ab!

2.5.2 Definition: $d\omega$

Es sei $\omega \in \Lambda^k M$ eine k -Form auf der n -dimensionalen Mannigfaltigkeit (M, φ, x^i) . Dann definiert man die $(k+1)$ -Form $d\omega$ als die eindeutig bestimmte $(k+1)$ -Form $d\omega$, für die gilt:

$$\forall \xi_1, \dots, \xi_{k+1} \in T_x M : \int_{\partial\varepsilon\Pi} \omega = \varepsilon^{k+1} d\omega(\xi_1, \dots, \xi_{k+1}) + \mathcal{O}(\varepsilon^{k+1})$$

mit

$$\varepsilon\Pi := \{\varphi^{-1}(x) + \varepsilon\lambda_1 d\varphi^{-1}(\xi_1) + \dots + \varepsilon\lambda_{k+1} d\varphi^{-1}(\xi_{k+1}) \mid \lambda_i \in [0, 1]\}$$

(vgl. Satz 2.5.1).

2.5.3 Lemma: Wedgeprodukt und äußere Ableitung

Es seien $\omega^k \in \Lambda^k M$ und $\omega^l \in \Lambda^l M$ Formen auf M . Dann gilt

$$d(\omega^k \wedge \omega^l) = (d\omega^k) \wedge \omega^l + (-1)^k \omega^k \wedge d\omega^l$$

2.5.4 Satz: Darstellung von $d\omega$

Für k -Form $\omega \in \Lambda^k M$ auf Mannigfaltigkeit M mit der Darstellung

$$\omega = \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in I} a_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

ist

$$\boxed{d\omega = \sum_{i \in I} da_{i_1, \dots, i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}} \quad (19)$$

Bemerke: Für 0-Form $\omega \in \Lambda^0 M$ ist $d\omega$ dann genau die 1-Form, die nach Definition 2.2.15 dem skalaren Feld $\omega \in \mathcal{F}(M)$ entspricht.

Beweis: Betrachten zunächst die 1-Form $\omega = adx^1$ auf der 2-dimensionalen Mannigfaltigkeit (M, φ, x^i) , dazu Vektoren $\xi, \eta \in T_x M$ und Parallelepiped $\varepsilon\Pi$ (vgl. Satz 2.5.1).

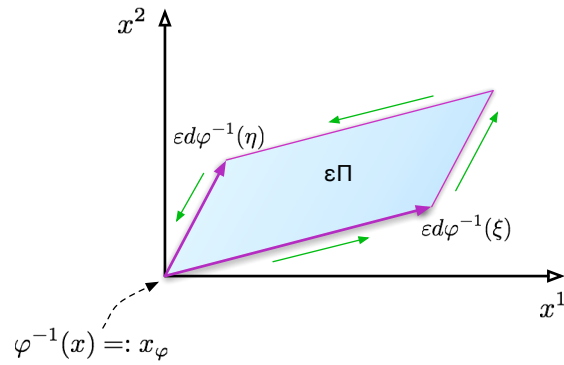


Abbildung 9: Zum Beweis von Satz 2.5.4. Grüne Pfeile sind positiv orientierte Basis in der jeweiligen Facette (violett).

Dann ist mit

$$\xi_\varphi := d\varphi^{-1}\xi, \quad \eta_\varphi := d\varphi^{-1}\eta, \quad x_\varphi := \varphi^{-1}(x)$$

der Abbildung zur entnehmen:

$$\begin{aligned} \partial\varepsilon\Pi &\cong ([0, \varepsilon], [0, \varepsilon] \ni t \xrightarrow{f_1} \varphi(x_\varphi + t\xi_\varphi), \text{std}) \\ &+ ([0, \varepsilon], [0, \varepsilon] \ni t \xrightarrow{f_2} \varphi(x_\varphi + \varepsilon\eta_\varphi), \text{std}) \\ &+ ([0, \varepsilon], [0, \varepsilon] \ni t \xrightarrow{f_3} \varphi(x_\varphi + \varepsilon\eta_\varphi + \varepsilon\xi_\varphi), \text{std}) \\ &+ ([0, \varepsilon], [0, \varepsilon] \ni t \xrightarrow{f_4} \varphi(x_\varphi + \varepsilon\xi_\varphi + t\eta_\varphi), \text{std}) \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}
\int_{\partial \varepsilon \Pi} \omega &= \sum_{i=1}^4 \int_{([0, \varepsilon], f_i, \text{std})} \omega = \sum_{i=1}^4 \int_{[0, \varepsilon]} f_i^* \omega = \sum_{i=1}^4 \int_{[0, \varepsilon]} (a \circ f_i) \cdot \underbrace{f_i^* dx^1}_{\frac{\partial f_i^1}{\partial t} dt} = \sum_{i=1}^4 \int_{[0, \varepsilon]} (a \circ f_i) \cdot \dot{f}_i^1 dt \\
&= \int_0^\varepsilon \left\{ \left[a(\varphi(x_\varphi + t\xi_\varphi)) \overset{\text{Orientierung}}{\downarrow} a(\varphi(x_\varphi + \varepsilon\eta_\varphi + t\xi_\varphi)) \right] \cdot \xi_\varphi^1 + \left[a(\varphi(x_\varphi + \varepsilon\xi_\varphi + t\eta_\varphi)) \overset{\text{Orientierung}}{\downarrow} a(\varphi(x_\varphi + t\eta_\varphi)) \right] \cdot \eta_\varphi^1 \right\} dt \\
&\stackrel{\text{Taylor}}{=} \int_0^\varepsilon \left[a(x) + \frac{\partial(a\varphi)}{\partial x} \Big|_{x_\varphi} t\xi_\varphi - a(x) - \frac{\partial(a\varphi)}{\partial x} \Big|_{x_\varphi} (\varepsilon\eta_\varphi + t\xi_\varphi) \right] \xi_\varphi^1 + \int_0^\varepsilon \mathcal{O}(\|t\xi_\varphi\|^2 + \|\varepsilon\eta_\varphi + t\xi_\varphi\|^2) dt \\
&\quad + \int_0^\varepsilon \left[a(x) + \frac{\partial(a\varphi)}{\partial x} \Big|_{x_\varphi} (\varepsilon\xi_\varphi + t\eta_\varphi) - a(x) - \frac{\partial(a\varphi)}{\partial x} \Big|_{x_\varphi} t\eta_\varphi \right] \eta_\varphi^1 dt + \int_0^\varepsilon \mathcal{O}(\|\varepsilon\xi_\varphi + t\eta_\varphi\|^2 + \|t\eta_\varphi\|^2) \\
&= \int_0^\varepsilon \left[-\frac{\partial(a\varphi)}{\partial x} \Big|_{x_\varphi} \varepsilon\eta_\varphi \xi_\varphi^1 + \frac{\partial(a\varphi)}{\partial x} \Big|_{x_\varphi} \varepsilon\xi_\varphi \eta_\varphi^1 \right] dt + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \\
&= \int_0^\varepsilon \varepsilon \left[\cancel{-\frac{\partial(a\varphi)}{\partial x^1} \Big|_{x_\varphi} \eta_\varphi^1 \xi_\varphi^1} - \frac{\partial(a\varphi)}{\partial x^2} \Big|_{x_\varphi} \eta_\varphi^2 \xi_\varphi^1 + \cancel{\frac{\partial(a\varphi)}{\partial x^1} \Big|_{x_\varphi} \xi_\varphi^1 \eta_\varphi^1} + \frac{\partial(a\varphi)}{\partial x^2} \Big|_{x_\varphi} \xi_\varphi^2 \eta_\varphi^1 \right] dt + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \\
&= \underbrace{\frac{\partial(a\varphi)}{\partial x^2} \Big|_{x_\varphi} \underbrace{[\xi_\varphi^2 \eta_\varphi^1 - \eta_\varphi^2 \xi_\varphi^1]}_{dx^2 \wedge dx^1(\xi, \eta)}}_{da \wedge dx^1(\xi, \eta)} \int_0^\varepsilon \varepsilon dt + \mathcal{O}(\varepsilon^3) = \varepsilon^2 \cdot da \wedge dx^1(\xi, \eta) + \mathcal{O}(\varepsilon^3)
\end{aligned}$$

das heißt $da \wedge dx^1 = d\omega$.

Bemerkungen:

- Der allgemeinere Fall $\omega = a(x_1, x_2) dx^i$ ist analog.
- Auch der Fall $a(x_1, \dots, x_n)$ wäre analog.
- Aufgrund der Linearität gilt Behauptung auch für allgemeine 1-Formen (Darstellung durch die dx^i).
- Mit Lemma 2.5.3 folgt die Behauptung für allgemeine k -Formen.

□

2.5.5 Satz über die äußere Ableitung von k -Formen

Es sei $\omega \in \Lambda^k N$ eine k -Form auf N . Dann gilt:

1. Für $f : M \rightarrow N$ ist $f^*(d\omega) = d(f^*\omega)$
2. $dd\omega = 0$ (folgt aus $\partial\partial\kappa = 0$ für k -Kette κ).
3. Ist U eine Untermannigfaltigkeit von M so gilt

$$d(\omega|_{TU}) = (d\omega)|_{TU}$$

(folgt aus Definition von $d\omega$)

2.5.6 Satz von Stokes

Es sei \varkappa eine $(k+1)$ -Kette und $\omega \in \Lambda^k M$ eine k -Form auf M . Dann gilt:

$$\boxed{\int_{\partial \varkappa} \omega = \int_{\varkappa} d\omega} \quad (20)$$

Beweis: Wegen Linearität genügt es den Satz für $(k+1)$ -Simplex zu zeigen. Betrachten zuerst $(k+1)$ -dimensionales Parallelepipid, o.B.d.A. das Rechteck Π aufgespannt durch die Vektoren $\xi_1, \dots, \xi_{k+1} \in T_x M$, wobei wir diese mit deren entsprechenden $d\varphi^{-1}\xi_i$ identifizieren. Nach Definition von $d\omega$ ist

$$\int_{\partial \Pi} \omega = d\omega(\xi_1, \dots, \xi_{k+1}) + \mathcal{O}\left[\left(\|\xi_1\|^2 + \dots + \|\xi_{k+1}\|^2\right)^{\frac{k+1}{2}}\right] \quad (21)$$

Teilt man nun Π in N^{k+1} Teilrechtecke Π_l , $l = 1, \dots, N^{k+1}$ auf (jeweils *Ursprung* x_l), jeweils aufgespannt durch $\{\frac{1}{N}\xi_i\}_{i=1}^{k+1}$ (vgl. Abbildung 10)

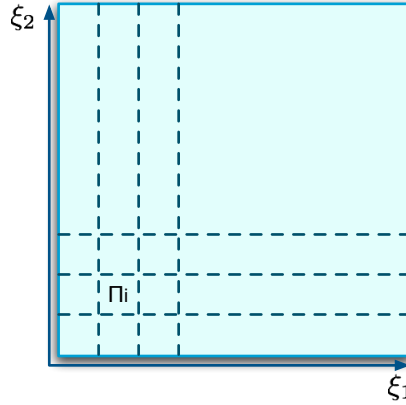


Abbildung 10: Zum Beweis vom Satz von Stokes

so erhält man nach Anwenden von Gleichung 21 auf Π_l :

$$\begin{aligned} \int_{\partial \Pi_l} \omega &= \frac{1}{N^{k+1}} d\omega(x_l)(\xi_1, \dots, \xi_{k+1}) + \mathcal{O}\left\{\frac{1}{N^{k+1}} \left[\|\xi_1\|^2 + \dots + \|\xi_{k+1}\|^2\right]^{\frac{k+1}{2}}\right\} \\ \Rightarrow \frac{1}{N^{k+1}} \left[\sum_{l=1}^{N^{k+1}} d\omega(x_l)(\xi_1, \dots, \xi_{k+1}) + \mathcal{O}(1) \right] &= \sum_l \int_{\partial \Pi_l} \omega \stackrel{(*)}{=} \int_{\partial \Pi} \omega \end{aligned}$$

(*) : Über jede innere Facette wird doppelt, jedoch jeweils mit unterschiedlicher Orientierung integriert

Durch Grenzwertbildung $N \rightarrow \infty$ geht die linke Seite über in das Integral $\int_{\Pi} d\omega$, so dass die Aussage zunächst für Parallelepipede gezeigt ist. Da jedes Polyeder D in Simplexes S_l zerlegt werden kann, für die analog zu (*) gilt

$$\int_D d\omega = \sum_l \int_{S_l} d\omega = \sum_i \int_{\partial S_i} \omega \stackrel{(*)}{=} \int_{\partial D} \omega$$

genügt es, den Satz nur noch auf Simplexes zu verallgemeinern. Tatsächlich sind Simplexes diffeomorph zu Parallelepipeden.

Es sei also $\sigma = (S, \rho : S \rightarrow M, \varepsilon_s)$ ein $(k+1)$ -Simplex, $\pi = (\Pi, \rho \circ f : \Pi \rightarrow M, \varepsilon_\pi)$ ein $(k+1)$ -Parallelepipid-Simplex und $f : \Pi \rightarrow S$ ein Diffeomorphismus, mit $f(\text{int}(\Pi)) = \text{int}(S)$ und für jede Seite S_Π von Π ist

- entweder $f(\mathcal{S}_\Pi)$ in einer Seite \mathcal{S}_S von S mit $\dim \mathcal{S}_S < k$ (und somit $\dim \mathcal{S}_\Pi < k$)
- oder $f(\text{int}(\mathcal{S}_\Pi)) = \text{int}(\mathcal{S}_S)$ für Seite \mathcal{S}_S von S

Dann gilt nach Satz 2.4.11:

$$\int_{\partial S} \omega \stackrel{(2.4.11)}{=} \int_{\partial \Pi} \omega = \int_{\Pi} d\omega = \int_S d\omega$$

□

Bemerkung zum Beweis: Der Beweis lief scheinbar so einfach ab, da die Definition (2.5.2) von $d\omega$ genau so gewählt wurde dass der Satz von Stokes asymptotisch gilt!

2.5.7 Spezialfall: Newton-Leibniz Integralformel

Für differenzierbare $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $a, b \in \mathbb{R}$ ist

$$\int_a^b f'(\xi) d\xi = f(b) - f(a)$$

Erläuterung: Fasst man $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ als 0-Form auf \mathbb{R} und $([a, b], \text{Id}, \rightarrow)$ als Kette auf, so ist df das übliche Differential und

$$\int_{[a,b]} df \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_{\partial[a,b]} f = -f(a) + f(b)$$

Bemerkung die unterschiedliche Orientierung der beiden 0-Simplizes $\{a\}$ und $\{b\}$.

2.5.8 Spezialfall: Greensche Formel

Für differenzierbares Vektorfeld (F^1, F^2) auf \mathbb{R}^2 und Menge² $\Omega \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial F^1}{\partial x^1} - \frac{\partial F^2}{\partial x^2} \right) dx^1 dx^2 = \int_{\partial \Omega} F^2 dx^1 + F^1 dx^2$$

Erläuterung: Es sei o.B.d.A Ω diffeomorphisch beschrieben durch einen einzigen 2-Simplex $\sigma = (S, f : S \rightarrow \Omega, \text{standard or.})$. Betrachtet man die 1-Form $\omega := F^2 dx^1 + F^1 dx^2$ auf \mathbb{R}^2 , so folgt nach Stokes

$$\begin{aligned} \int_{\partial \Omega} F^2 dx^1 + F^1 dx^2 &\cong \int_{\partial S} F^2 dx^1 + F^1 dx^2 \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_S d(F^2 dx^1 + F^1 dx^2) = \int_S \left[dF^2 \wedge dx^1 + dF^1 \wedge dx^2 \right] \\ &= \int_S \left[\frac{\partial F^2}{\partial x^1} \underbrace{dx^1 \wedge dx^1}_0 + \frac{\partial F^2}{\partial x^2} dx^2 \wedge dx^1 + \frac{\partial F^1}{\partial x^1} dx^1 \wedge dx^2 + \frac{\partial F^1}{\partial x^2} \underbrace{dx^2 \wedge dx^2}_0 \right] = \int_S \left[\frac{\partial F^1}{\partial x^1} - \frac{\partial F^2}{\partial x^2} \right] dx^1 \wedge dx^2 \\ &\cong \int_{\Omega} \left[\frac{\partial F^1}{\partial x^1} - \frac{\partial F^2}{\partial x^2} \right] dx^1 dx^2 \end{aligned}$$

2.5.9 Kelvin-Stokes Theorem

Es sei $\mathbf{F} = (F^1, F^2, F^3)$ ein differenzierbares Vektorfeld in \mathbb{R}^3 , dazu Fläche $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Dann gilt

$$\int_{\Omega} \text{rot } \mathbf{F} d\Omega = \int_{\partial \Omega} \mathbf{F} d\vec{r}$$

Erläuterung: Mit $\omega := F^1 dx^1 + F^2 dx^2 + F^3 dx^3$ folgt analog zu vorhin die Behauptung.

²Zerlegbar in endlich viele, zu Polyedern diffeomorphe, Mengen

2.5.10 Satz von Ostrogradski-Gauß

Für differenzierbares Vektorfeld $\mathbf{F} = (F^1, F^2, F^3)$ in \mathbb{R}^3 und Ketten-zerlegbare Menge $V \subset \mathbb{R}^3$ gilt

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV = \int_{\partial V} \mathbf{F} \, d\mathbf{A}$$

Erläuterung: Identifizieren wir den rechten Integranden $\mathbf{F} \, d\mathbf{A}$ mit der 2-Form

$$\mathbf{F} \, d\mathbf{A} \cong F^1 dx^2 \wedge dx^3 + F^2 dx^3 \wedge dx^1 + F^3 dx^1 \wedge dx^2$$

und

$$\operatorname{div} \mathbf{F} \, dV \cong \frac{\partial F^i}{\partial x^i} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$

so folgt analog zu vorhin die Behauptung.

2.6 Fluss

2.6.1 Definition: Vektor (Def. 3)

Es sei $a \in M$ ein Punkt auf der n -dimensionalen Mannigfaltigkeit M . Dann heißt eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $X_a : \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$X_a(f \cdot g) = X_a(f) \cdot g(a) + f(a) \cdot X_a(g)$$

(Leibnitz Regel) *Tangentenvektor* oder einfach *Vektor* auf M im Punkt a . Man schreibt analog zu vorhin $X_a \in T_a M$.

Bemerkung: Mann lässt allgemein auch $X_a : \mathcal{C}^\infty(U) \rightarrow \mathbb{R}$ für eine Umgebung $U \ni a$ zu.

2.6.2 Definition: Vektorfeld

Eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $X : \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$ mit

$$X(fg) = X(f) \cdot g + f \cdot X(g)$$

heißt *Vektorfeld* auf M . Man schreibt \mathcal{X} für den \mathcal{F} -linearen Raum aller Vektorfelder auf M .

2.6.3 Lemma über Vektoren und konstante Funktionen

Es sei $X_a \in T_a M$ ein Vektor (nach Def. 3) und $C \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$X_a(C) = 0$$

Beweis: Wegen Linearität genügt es die Aussage für $C = 1$ zu zeigen:

$$X_a(1) = X_a(1 \cdot 1) \stackrel{\text{Leibnitz}}{=} X_a(1) \cdot 1 + 1 \cdot X_a(1) = 2X_a(1)$$

□

Bemerke: Aus dem Beweis ist ersichtlich dass Vektorfelder ebenfalls diese Eigenschaft besitzen!

2.6.4 Lemma über Vektoren und Funktionen mit $df = 0$

Es sei $X_a \in T_a M$ ein Vektor (Def. 3), X ein Vektorfeld und $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ mit $d_a f = 0$. Dann ist $X_a(f) = 0$ und $X(f)(a) = 0$.

Beweis: Betrachten das ganze in Karte ψ mit Koordinaten x^i . Wegen

$$f(x) - f(a) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f[a + t(x - a)] dt = \sum_i (x^i - a^i) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i} [a + t(x - a)] dt$$

ist

$$\begin{aligned} X_a(f) &\stackrel{\text{Linearität}}{=} \underbrace{X_a(f(a))}_0 + \sum_i X_a \left\{ (x^i - a^i) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i} [a + t(x - a)] dt \right\} \\ &\stackrel{\text{nach Lemma 2.6.3}}{=} \sum_i X_a \left\{ (x_i - a^i) \right\} \cdot \underbrace{\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i} [a + t(x - a)] dt}_0 + \sum_i \underbrace{(x^i - a^i)}_0 \cdot X_a \left\{ \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i} [a + t(x - a)] dt \right\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Aus dem Beweis ist ersichtlich dass auch $X(f)(a) = 0$ gilt.

□

2.6.5 Folgerung: Lokalität von Tangentenvektoren

Es sei $X_a \in T_a M$ ein Tangentenvektor (Def. 3) und $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Dann hängt $X_a(f)$ nur vom Differential df am Punkt a ab. Das heißt: Sind $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ zwei skalare Felder mit $df|_a = dg|_a$, so ist

$$X_a(f) = X_a(g)$$

Beweis: Nach Lemma 2.6.4 gilt wegen $d_a(f - g) = 0$ entsprechend:

$$0 \stackrel{(2.6.4)}{=} X_a(f - g) = X_a(f) - X_a(g)$$

□

2.6.6 Folgerung: Lokalität von Vektorfeldern

Es sei $X : \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$ ein Vektorfeld auf M und $f \in \mathcal{C}^\infty$. Dann hängt $X(f)(a)$ nur von dem Differential df in a ab. Das heißt: Für Funktionen $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ mit $d_a f = d_a g$ ist

$$X(f)(a) = X(g)(a)$$

Beweis: Analog zu Folgerung 2.6.5.

Bemerkung: Für gegebenes Vektorfeld $X : \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$ macht es Sinn sich X als Funktion vorzustellen, die (auf natürlicher Weise) jedem Punkt $a \in M$ einen Tangentenvektor (nach Def. 3) zuordnet, gemäß:

$$X_a(f) := X(f)(a)$$

Dass X_a tatsächlich ein Tangentenvektor ist, ergibt sich unmittelbar aus der Definition von Vektorfeldern. Andererseits ist natürlich X durch die Vorgabe der X_a für jeden Punkt $a \in M$, eindeutig bestimmt³.

³Allerdings gehört nicht zu jeder Schar $\{X_a\}_{a \in M}$ ein Vektorfeld (vgl. \mathcal{C}^∞ -Bedingung)

2.6.7 Äquivalenz der Vektor-Definitionen

Zu klären wäre, inwiefern die neue Definition (2.6.1) zu den alten Definitionen (2.1.6) und (2.1.7) äquivalent ist. Dabei ist die Äquivalenz so zu verstehen, dass ein bijektiver, kommutativer Zusammenhang zwischen den jeweiligen Definitionen existiert (vgl. Abbildung 11).

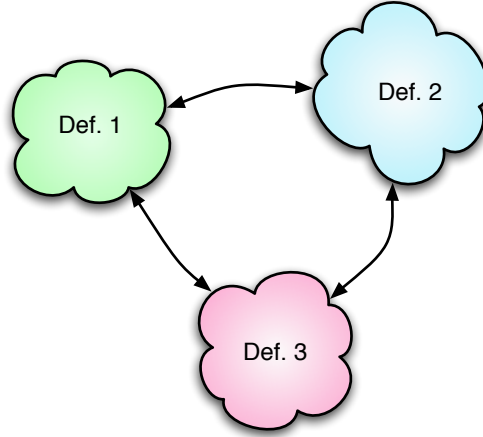


Abbildung 11: Zur Äquivalenz der Vektor-Definitionen

Dabei genügt es die Äquivalenz von Def. 2 und Def. 3 zu zeigen (vgl. 2.1.8). Gegeben sei ein Vektor $[\gamma] \in T_a M$ nach Def. 2, das heißt insbesondere $\gamma(0) = a$. Dann setzt man

$$X_a(f) := \left. \frac{d}{dt} [f(\gamma(t))] \right|_{t=0} \quad (22)$$

für $f \in C^\infty(M)$. Dies ist tatsächlich ein Tangentenvektor, denn

$$X_a(fg) = \left. \frac{d}{dt} [f(\gamma(t))g(\gamma(t))] \right|_{t=0} \stackrel{\text{klassisch Leibnitz}}{=} \left. \frac{d}{dt} [f(\gamma(t))] \right|_{t=0} \cdot \underbrace{g(\gamma(0))}_{g(a)} + \underbrace{f(\gamma(0))}_{f(a)} \left. \frac{d}{dt} [g(\gamma(t))] \right|_{t=0} = X_a(f)g(a) + f(a)X_a(g)$$

\mathbb{R} -Linearität gilt aufgrund der Linearität der Ableitung. Wohldefiniertheit ist gewährleistet, denn für $[\gamma] = [\zeta] \in T_a M$ ist

$$\left. \frac{d}{dt} [f(\gamma(t))] \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} [(f\psi) \circ (\psi^{-1}\gamma)(t)] \right|_{t=0} = d(f\psi) \left. \frac{d}{dt} (\psi^{-1}\gamma) \right|_{t=0} \stackrel{(\gamma)}{=} d(f\psi) \left. \frac{d}{dt} (\psi^{-1}\zeta) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} [f(\zeta(t))] \right|_{t=0}$$

(ψ :Karte) für beliebiges $f \in C^\infty(M)$. Aus letzter Rechnung wird auch die Eineindeutigkeit dieser Zuordnung ersichtlich: Sind $[\gamma] \neq [\zeta]$ so sind auch die resultierenden X_a^γ, X_a^ζ unterschiedlich.

Es bleibt noch zu zeigen: Diese Zuordnung ist surjektiv⁴. Sei also $X_a \in T_a M$ ein Tangentenvektor nach Def. 3 und $f \in C^\infty(M)$. Setzen wir

$$\tilde{f} := f(a) + \sum_i \left. \frac{\partial(f\psi^{-1})}{\partial x^i} \right|_{\psi(a)} \cdot x^i$$

so ist

$$d(f - \tilde{f}) = 0$$

woraus nach Lemma 2.6.4 folgt:

$$X_a(f) \stackrel{(2.6.4)}{=} X_a(\tilde{f}) = \underbrace{X_a(f(a))}_0 + \sum_i X_a \left\{ \underbrace{\left. \frac{\partial(f\psi^{-1})}{\partial x^i} \right|_{\psi(a)}}_{\text{const}} \cdot x^i \right\} = \sum_i \left. \frac{\partial f}{\partial x^i} \right|_a \cdot X_a(x^i) \quad (23)$$

⁴Jedem Vektor nach Def. 3 ist also ein (passender) Vektor nach Def. 2 zuzuordnen.

(vgl. Lokalität von Tangentenvektoren in Abschnitt 2.6.5). Betrachtet man nun die Kurve $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ mit

$$\psi^{-1}\gamma(t) = \psi^{-1}(a) + t \cdot (X_a(x^1), \dots, X_a(x^n))$$

so ist $[\gamma] \in T_a M$ genau der dem Vektor X_a nach Def. 2 entsprechende Vektor, denn dann ist genau

$$\left. \frac{d}{dt} [f(\gamma(t))] \right|_{t=0} = \sum_i \left. \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{d\gamma^i}{dt} \right|_{t=0} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} X_a(x^i) = X_a(f)$$

Bemerkungen:

- Zu erkennen ist dass $X_a \in T_a M$ (Def. 3) in Def. 1, Karte (ψ, x^i) , die Form

$$X_a \cong (X_a(x^1), \dots, X_a(x^n)) = d\psi^{-1}(X_a)$$

annimmt.

- Man schreibt X_a auch oft in der Form

$$X_a = \sum_i X_a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_a$$

mit den *Komponenten* $X_a^i := X_a(x^i)$ und den *Koordinatenvektoren* $\frac{\partial}{\partial x^i} =: \partial_{x^i} = \partial_i$:

$$\partial_{x^i} f := \left. \frac{\partial f}{\partial x^i} \right|_a$$

Bemerke dass die ∂_{x^i} per Konstruktion eine Basis in $T_x M$ bilden, insbesondere linear unabhängig sind.

- Analog schreibt man auch für Vektorfelder

$$X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad , \quad X^i = X(x^i) \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x^i}(f) = \frac{\partial f}{\partial x^i} \in \mathcal{C}^\infty(M)$$

- Aus der Darstellung in Gl. 23 ist ersichtlich

$$\underbrace{X}_{\text{Def. 3}}(f) = df(X) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} X^i \tag{24}$$

- Hinsichtlich dieser Analogie schreibt man für eine Kurve γ auf M oft $\dot{\gamma}(t)$ für den durch γ am Punkt $\gamma(t)$ erzeugten Tangentenvektor:

$$\dot{\gamma}(t)f := \frac{d}{dt} f(\gamma(t))$$

Dieser hat die Komponenten

$$[\dot{\gamma}(t)]^i = \dot{\gamma}(t)x^i = \frac{d}{dt} \underbrace{x^i(\gamma(t))}_{[\psi^{-1}\gamma(t)]^i} = \dot{\gamma}^i(t)$$

- Die Handhabung mehrerer Definitionen für Tangentenvektoren bringt mit sich sowohl Vorteile als auch Nachteile. Je nach Situation kann die eine oder andere Variante bevorzugt werden. Im Nachhinein sollte jedoch eine entsprechende Interpretation bzgl. der anderen Definitionen möglich sein.

2.6.8 Korollar: Kettenregel für Vektoren

Es sei $X \in T_a M$ und $\rho^1, \dots, \rho^k \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Dann gilt für jede Funktion $f = f(\rho^1, \dots, \rho^k) \in \mathcal{C}^\infty(M)$ die Kettenregel:

$$Xf = \sum_i \frac{\partial f}{\partial \rho^i} \cdot X\rho^i$$

Beweis: Folgt direkt aus Darstellung 22.

2.6.9 Darstellung von k-Formen

Es sei M eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit mit der Karte ψ in Koordinaten x^i . Dann sind die Koordinatenformen dx^i genau die Dualen zu den ∂_{x^i} :

$$dx^i(\partial_{x^j}) = \delta_j^i$$

denn nach obigen Überlegungen besitzt ∂_{x^j} in Karte ψ genau die Darstellung

$$\partial_{x^j} \stackrel{\psi}{\cong} (\partial_{x^j}(x^1), \dots, \partial_{x^j}(x^n)) = (0, \dots, 0, \underset{j}{\uparrow} 1, 0, \dots, 0)$$

Jede k -Form $\omega \in \Lambda^k M$ besitzt somit die Darstellung

$$\omega = \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_k} = \frac{1}{k!} \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \quad (25)$$

mit den Komponenten

$$\omega_{i_1 \dots i_k} := \omega(\partial_{x^{i_1}}, \dots, \partial_{x^{i_k}})$$

2.6.10 Definition: Lie Klammer

Es sei M eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit. Man definiert die *Lie-Klammer* (oder *Kommutator*)

$$[\cdot, \cdot] : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$$

als die Abbildung, die Vektorfeldern $X, Y \in \mathcal{X}$ das neue Vektorfeld $[X, Y] \in \mathcal{X}$ zuordnet, gemäß

$$[X, Y](f) := X(Y(f)) - Y(X(f))$$

Man schreibt:

$$[X, Y] = XY - YX$$

und sagt X und Y *kommutieren*, falls $[X, Y] = 0$.

Behauptung: $[X, Y]$ ist tatsächlich ein Vektorfeld.

Beweis: \mathbb{R} -Linearität ist klar. Die Leibnitz-Regel ergibt sich durch direktes ausrechnen:

$$\begin{aligned} [X, Y](fg) &\stackrel{\text{def}}{=} XY(fg) - YX(fg) = (XYf)g + (XYg)f - (YXf)g - (YXg)f \\ &= (XYf - YXf)g + (XYg - YXg)f = g[X, Y](f) + f[Y, X](g) \end{aligned}$$

2.6.11 Darstellung der Lie-Klammer

Für Vektorfelder X, Y lässt sich schreiben

$$[X, Y] = [X, Y]^i \partial_i$$

mit den Komponenten

$$[X, Y]^i = [X, Y](x^i) = XY^i - YX^i = \sum_j \left[X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - \frac{\partial X^i}{\partial x^j} Y^j \right] \quad (26)$$

(vgl. Bemerkungen in Abschnitt 2.6.7).

Bemerkung: Obere Darstellung wird oft als Definition von $[\cdot, \cdot]$ verwendet.

2.6.12 Eigenschaften der Lie-Klammer

Für Vektorfelder $X, Y, Z \in \mathcal{X}$, skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ und Feld $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ gilt:

Antisymmetrie: $[X, Y] = -[Y, X]$

\mathbb{R} -Bilinearität: $[X, Y + \alpha Z] = [X, Y] + \alpha [X, Z]$

Jacobi Identität: $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$

Quasi-Linearität: $[fX, Y] = f[X, Y] - (Yf) \cdot X$

2.6.13 Lemma über die Lie-Klammer von Koordinatenvektorfeldern

Es sei M eine Mannigfaltigkeit in den Koordinaten x^i . Dann gilt:

$$[\partial_{x^i}, \partial_{x^j}] = 0 \quad \forall i, j$$

Beweis: Nach dem Satz von Schwarz gilt

$$[\partial_i, \partial_j] f = \partial_i \partial_j f - \partial_j \partial_i f = \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} - \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial x^i} = 0$$

für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

2.6.14 Lemma über Vektorfelder und Koordinaten

Es sei M eine Mannigfaltigkeit in den Koordinaten x^i , darauf Vektorfeld X . Ist $[X, \partial_{x^i}] = 0$, so hängen sämtliche Koordinaten von X nicht von der Koordinate x^i ab.

Beweis:

$$0 = [X, \partial_i] = [X^j \partial_j, \partial_i] = X^j \underbrace{[\partial_j, \partial_i]}_0 - (\partial_i X^j) \cdot \partial_j \Rightarrow \partial_i X^j = 0 \quad \forall j$$

(2.6.13)

□

2.6.15 Definition: 1-Parameter Gruppe von Diffeomorphismen

Eine *1-Parameter Gruppe von Diffeomorphismen* oder *1-Parameter Diffeomorphismengruppe* oder *1-Fluss* auf M ist eine differenzierbare Abbildung

$$\varphi : M \times \mathbb{R} \rightarrow M, (x, t) \mapsto \varphi(x, t) = \varphi_t(x)$$

mit:

- $\varphi_t : M \rightarrow M$ ist ein Diffeomorphismus.
- $\varphi_0 = \text{Id}$
- $\varphi_{s+t} = \varphi_s \circ \varphi_t$

Bemerkungen:

- Eine 1-Parameter Diffeomorphismengruppe ist als Menge $\{\varphi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ eine Gruppe bzgl. der Verkettung $\varphi_s \circ \varphi_t$.
- Die Abbildung $\tau \rightarrow \varphi_\tau$ stellt einen Homomorphismus von $(\mathbb{R}, +)$ in die Gruppe $(\{\varphi_t\}_{t \in \mathbb{R}}, \circ)$ dar.

Beispiel: Die Familie $\varphi_t(x, y) := (x + t, y)$, $t \in \mathbb{R}$ ist eine 1-parameter Diffeomorphismengruppe auf $M = \mathbb{R}^2$.

2.6.16 Definition: Lokale 1-Parameter Familie Diffeomorphismen

Eine *lokale 1-Parameter Familie von Diffeomorphismen* oder *lokaler 1-Fluss* ist eine differenzierbare Abbildung

$$\varphi : \mathcal{V} \rightarrow M, \quad \mathcal{V} \subset M \times \mathbb{R}$$

wobei \mathcal{V} so geschaffen ist, dass für jeden Punkt $x \in M$ ein Intervall $I_\varepsilon := (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ existiert, mit $\{x\} \times I_\varepsilon \subset \mathcal{V}$, und gilt:

- $\varphi_t : \underbrace{U}_{\subset M} \rightarrow \text{image}_{\varphi_t}(U)$ ist Diffeomorphismus, falls sinnvoll.
- $\varphi_0 = \text{Id}$
- $\varphi_{s+t} = \varphi_s \circ \varphi_t$ (falls sinnvoll)

Bemerke:

- Eine lokale 1-parameter Familie von Diffeomorphismen ist **keine** Gruppe. Sie ist insbesondere nicht abgeschlossen bzgl. der Verkettung.
- Später werden wir zu (lokalen) 1-Flüssen einfach Fluss sagen. Ein *vollständiger* Fluss ist dann ein 1-Fluss.

Beispiel: Betrachten die 2-dimensionale Zentrum-lose, offene Kugel $M := B_1^o \setminus \{0\}$, darauf die Familie

$$\varphi_t(r, \varphi) := (r + t, \varphi)$$

(radiale Strömung). Für jeden Punkt $x \in M$ existiert eine Zeitspanne I_ε so dass $\varphi_\tau(x)$ für $\tau \in I_\varepsilon$ definiert ist.

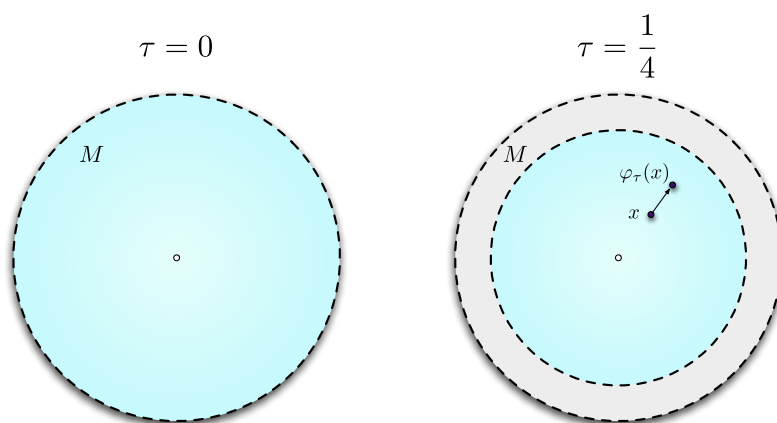


Abbildung 12: Zur lokalen 1-parameter Familie Diffeomorphismen auf $B_1^o \setminus \{0\}$. Blauer Bereich ist Definitionsgebiet von φ_τ .

Für Zeiten $\tau \geq 1$ ist φ_τ nirgends mehr definiert (alle Punkte sind *rausgeströmt*).

2.6.17 Definition: Integralkurve

Es sei X ein Vektorfeld auf M . Dann ist $\gamma : (a, b) \rightarrow M$ eine *Integralkurve* zu X , falls $\dot{\gamma}(t) = X_{\gamma(t)}$.

Bemerke: Ist $\gamma : (a, b) \rightarrow M$ eine Integralkurve zu X , so ist auch

$$\gamma(t + c) : (a - c, b - c) \rightarrow M, \quad c : \text{const}$$

eine integrale Kurve zu X . Nennen Γ_X die Menge aller Integralkurven zu X .

Bemerke: Man erlaubt auch $a, b = \mp\infty$.

2.6.18 Definition: Vereinigung von Integralkurven

Es seien $\gamma : (a, b) \rightarrow M$, $\tilde{\gamma}(\tilde{a}, \tilde{b}) \rightarrow M$ Integralkurven zum Vektorfeld X , mit

$$\gamma(s) = \tilde{\gamma}(t)$$

für geeignete s, t (o.B.d.A $s - a \geq t - \tilde{a}$). Dann definiert man die *Vereinigung*

$$\gamma \cup \tilde{\gamma} : (a, b) \cup (\tilde{a} + s - t, \tilde{b} + s - t) \rightarrow M$$

gemäß

$$(\gamma \cup \tilde{\gamma})(\tau) := \begin{cases} \gamma(\tau) & : \tau \in (a, b) \\ \tilde{\gamma}(\tau + t - s) & : \tau \in (\tilde{a} + s - t, \tilde{b} + s - t) \end{cases}$$

Bemerkung: $\gamma \cup \tilde{\gamma}$ ist auch Integralkurve zu X .

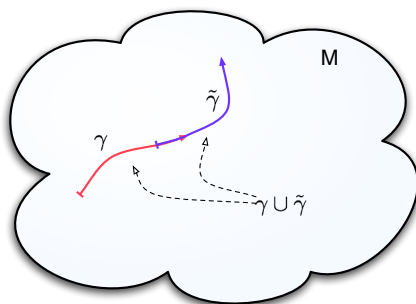


Abbildung 13: Zur Vereinigung von Integralkurven

2.6.19 Definition: Maximale Integralkurve

Eine Integralkurve $\gamma \in \Gamma_X$ heißt *maximal* falls für alle Integralkurven $\tilde{\gamma} \in \Gamma_X$ gilt $\text{image}(\gamma \cup \tilde{\gamma}) = \text{image}(\gamma)$.

2.6.20 Satz über maximale Integralkurven

Es sei X ein Vektorfeld auf M . Dann existiert für jeden Punkt $x \in M$ genau eine maximale Integralkurve $\gamma \in \Gamma_X$ durch x :

$$\forall x \in M : \exists! \gamma \in \Gamma_X : \gamma(0) = x \wedge \gamma \text{ maximal}$$

Beispiel 1: Für $M = \mathbb{R}^2$, $X = \partial_x \cong (1, 0)$ ist für jeden Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ die Kurve

$$\gamma_{(x,y)}(t) := (x + t, y) \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

die zu x gehörige maximale Integralkurve.

Beispiel 2: Für $M = B_1^o$, $X = \partial_x$ ist

$$\gamma_{(x,y)}(t) := (x + t, y) \quad , \quad t \in \left(-\sqrt{1 - y^2} + x, \sqrt{1 - y^2} - x \right)$$

die in $(x, y) \in B_1^o$ maximale Integralkurve.

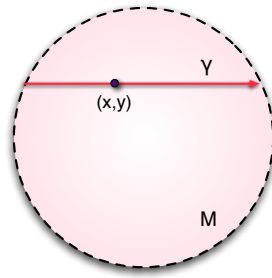


Abbildung 14: Zu maximalen Integralkurven in B_1^o

2.6.21 Satz: Existenz und Eindeutigkeit von Integralkurven

Es sei $X \in \mathcal{X}$ ein Vektorfeld auf M und $x \in M$. Für Integralkurve $\gamma \in \Gamma_X$ gelte in Karte (ψ, x^i) :

$$\frac{d\gamma^i}{dt}(t) \stackrel{!}{=} X_{\gamma(t)}^i, \quad \gamma(0) = x$$

Diese hinreichende (und notwendige Bedingung) an γ entspricht einer gewöhnlichen Differentialgleichung in den Komponenten von γ . Nach dem Existenz- und Eindeutigkeitsatz von Picard-Lindelöf existiert in einer Umgebung U von x genau eine Lösung des Anfangswertproblems $\gamma(0) = x$. Zu jedem Punkt $x \in M$ gibt es also lokal genau eine Integralkurve $\gamma \in \Gamma_X$, $\gamma(0) = x$ (bis auf Definitionsbereichseinschränkungen). Die durch x gehende maximale Integralkurve ist die Lösung des AWP mit maximalem Definitionsbereich.

2.6.22 Zusammenhang zwischen Vektorfeldern und 1-Flüssen

Es sei M eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit in der Karte (ψ, x^i) . Dann ist jedes Vektorfeld $X \in \mathcal{X}$ äquivalent zu einem lokalen 1-Fluss φ auf M .

Erläuterung: Zu lokalen 1-Fluss $\varphi : \mathcal{V} \rightarrow M$ definieren das Vektorfeld

$$X_a(f) := \left. \frac{d}{dt} f(\varphi_t(a)) \right|_{t=0}, \quad a \in M, \quad f \in \mathcal{C}^\infty(M)$$

(nach Def. 3). Dies ist tatsächlich ein Vektorfeld: Linearität und Leibnitz-Regel folgen aus äquivalenten Eigenschaften der Ableitung. Alternativ wären

$$X_a := [\varphi_t(a)]$$

bzw.

$$X_a := \left. \frac{d}{dt} [\psi^{-1}(\varphi_t(a))] \right|_{t=0}$$

die äquivalenten Vektoren jeweils nach Def. 2 und 1.

Sei umgekehrt $X \in \mathcal{X}$ ein Vektorfeld auf M , und zu jedem Punkt $x \in M$ sei $\gamma_x \in \Gamma_X$ die maximale Integralkurve durch x (vgl. 2.6.21). Dann ist der durch

$$\varphi_t(x) := \gamma_x(t) \tag{27}$$

definierte Fluss der zu X entsprechende (lokale) 1-Fluss (vgl. nächsten Satz 2.6.23).

2.6.23 Satz über 1-Flüsse

Es sei X ein Vektorfeld auf M und $(x, t) \mapsto \varphi_t(x)$ der durch X induzierte lokale 1-Fluss (vgl. 2.6.22 Gl. 27). Dann ist φ tatsächlich ein (lokaler) 1-Fluss. Insbesondere:

1. Es gilt: $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$ falls sinnvoll.
2. Die Abbildung $(x, t) \mapsto \varphi_t(x)$ ist glatt und definiert auf offener Teilmenge von $M \times \mathbb{R}$.
3. Ist M kompakt (Erinnerung: M war metrischer Raum) so ist $\varphi_t : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$, das heißt φ ist vollständig.

Beweis:

1. Es seien sowohl φ_{t+s} als auch $\varphi_t(\varphi_s(x))$ sinnvoll. Dann ist $\varphi_t(\varphi_s(x))$ als Funktion von t genau die (maximale) Integralkurve zu X durch $\varphi_s(x)$ mit

$$\varphi_t(\varphi_s(x)) \Big|_{t=0} = \varphi_s(x)$$

Andererseits hat aber auch φ_{t+s} diese Eigenschaften: Zum einen ist

$$\varphi_{t+s}(x) \Big|_{t=0} = \varphi_s(x)$$

und zum anderen ist $\varphi_{t+s}(x)$ tatsächlich Integralkurve zu X :

$$\frac{d}{dt} \varphi_{t+s}(x) = \frac{d}{dt} \gamma_x(t+s) = \frac{d}{d(t+s)} \gamma_x(t+s) = X_{\gamma_x(t+s)}$$

Aufgrund der Eindeutigkeit solch einer Integralkurve (vgl. 2.6.21), ist $\varphi_t(\varphi_s(x)) = \varphi_{t+s}(x)$.

Bemerkung: Somit ist insbesondere φ_t ein lokaler Diffeomorphismus, mit $\varphi_t^{-1} = \varphi_{-t}$, denn

$$\varphi_t \circ \varphi_{-t} = \varphi_{t-t} = \varphi_0 = \text{Id}$$

2. Nach der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen, hängt die Lösung des AWP

$$\dot{u} = f(u, t) \quad , \quad u(t_0) = u_0$$

im Falle das f glatt ist, in einer Umgebung von (u_0, t_0) ebenfalls glatt von (u_0, t_0) ab. In unserem Fall (Karte ψ , Koordinaten x^i), mit $\varphi_t(x) := \gamma_x(t)$ (lokal) als Lösung des AWP

$$\frac{d}{dt} \gamma_x(t) \stackrel{\text{in Karte } \psi}{=} (\dot{\gamma}_x^1(t), \dots, \dot{\gamma}_x^n(t)) \stackrel{!}{=} (X^1(\gamma(t)), \dots, X^n(\gamma(t))) \quad , \quad \gamma_x(0) \stackrel{!}{=} x$$

hängt $\gamma_x(t)$ in einer Umgebung von (x, t) glatt von t und x ab.

2.6.24 Beispiel eines Flusses

Betrachten den \mathbb{R}^2 , darauf das Vektorfeld

$$X_{(x,y)} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

Gesucht ist der zu X gehörige Fluss $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$. Dabei löst $\varphi_t(x_0)$ das Anfangswertproblem

$$\frac{d}{dt} \varphi_t(x_0, y_0) = X_{\varphi_t(x_0, y_0)} = \begin{pmatrix} -\varphi_t^x(x_0, y_0) \\ \varphi_t^y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \quad , \quad \varphi_0(x_0, y_0) = (x_0, y_0)$$

Somit ist

$$\varphi_t(x, y) = \begin{pmatrix} xe^{-t} \\ ye^t \end{pmatrix}$$

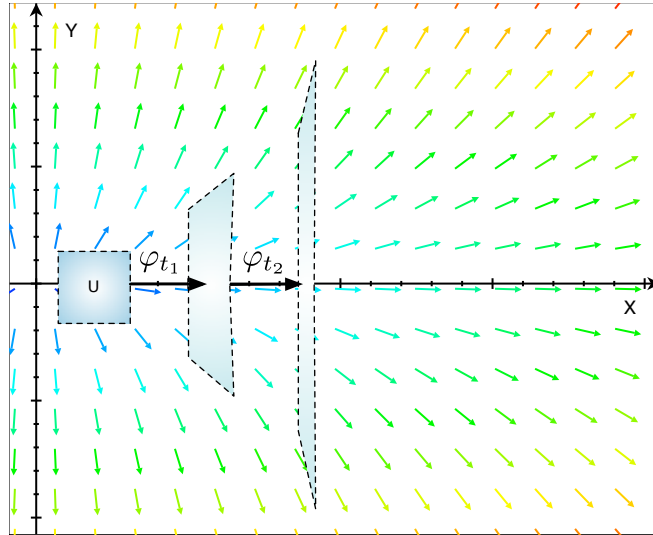


Abbildung 15: Darstellung eines Vektorfeldes, das den Fluss φ_t erzeugt. Die Punktmenge U wird durch den Fluss verschoben und deformiert. Bemerke dass deren Volumen dabei erhalten bleibt (vgl. Lemma von Liouville 1.3.3).

2.7 Lie-Ableitung

Es sei $f : M \rightarrow M$ ein Diffeomorphismus. Betrachten zu Vektorfeld Y das Vektorfeld $df(Y) := Y^f$ definiert durch

$$Y_a^f := [df(Y)]_a := (d_a f)Y_a \quad , \quad a \in M$$

Ist nun speziell $f = \varphi_t$ der Fluss bzgl. des Vektorfeldes X (vgl. 2.6.22), so ist

$$Y_a^{\varphi_t} := (d_a \varphi_t)Y_a$$

Dabei hängt das (zeitabhängige) Vektorfeld Y^{φ_t} glatt von t ab.

2.7.1 Definition: Lie-Ableitung

Es seien X, Y zwei Vektorfelder auf M und φ_t der lokale Fluss zu X . Dann definiert man die *Lie-Ableitung* $\mathcal{L}_X Y$ von Y nach X als das Vektorfeld

$$\mathcal{L}_X Y := \left. \frac{d}{dt} (Y_{\varphi_t}^{\varphi_{-t}}) \right|_{t=0}$$

wobei

$$(\mathcal{L}_X Y)_a := \left. \frac{d}{dt} (Y_{\varphi_t(a)}^{\varphi_{-t}}) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \left[(d_{\varphi_t(a)} \varphi_{-t}) Y_{\varphi_t(a)} \right] \right|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [d_{\varphi_t(a)} \varphi_{-t}(Y_{\varphi_t(a)}) - Y_a]$$

für $a \in M$.⁵

⁵In diesem Fall ist die Lie-Ableitung *zukunftsorientiert*. Manche Autoren verwenden auch eine alternative, vergangenheitsorientierte Definition

$$\mathcal{L}_X \omega := \left. \frac{d}{dt} (Y_{\varphi_{-t}}^{\varphi_t}) \right|_{t=0}$$

2.7.2 Satz: Gleichheit der Lie-Ableitung und Lie-Klammer

Für Vektorfelder X, Y ist

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$$

Beweis: Für Diffeomorphismus $f : M \rightarrow M$ und skalarem Feld $g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ ist

$$\begin{aligned} Y^f (g \circ f^{-1}) &= df(Y) (g \circ f^{-1}) = \frac{\partial f^i}{\partial x^j} Y^j \frac{\partial}{\partial x^i} (g \circ f^{-1}) \\ &= \frac{\partial f^i}{\partial x^j} Y^j \frac{\partial g}{\partial x^k} (f^{-1}) \frac{\partial (f^{-1})^k}{\partial x^i} = \delta_j^k Y^j \frac{\partial g}{\partial x^k} (f^{-1}) = Y^k \frac{\partial g}{\partial x^k} (f^{-1}) \\ &= Y_{f^{-1}}(g) = (Y(g)) \circ f^{-1} \end{aligned}$$

Insbesondere also

$$Y^{\varphi^{-t}} (g \circ \varphi_t) = (Yg) \circ \varphi_t$$

Durch Ableiten $\frac{d}{dt} \Big|_{t=0}$ erhält man

$$\frac{d}{dt} Y^{\varphi^{-t}} (g \circ \varphi_t) \Big|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial v} Y^{\varphi^{-v}} (g \circ \varphi_u) \Big|_{v=u=0} + \frac{\partial}{\partial u} Y^{\varphi^{-v}} (g \circ \varphi_u) \Big|_{v=u=0}$$

$$\stackrel{\varphi_0 = \text{Id}}{=} \frac{d}{dt} Y^{\varphi^{-t}} \Big|_{t=0} (g) + \frac{d}{dt} Y (g \circ \varphi_t) = \frac{d}{dt} Y^{\varphi^{-t}} \Big|_{t=0} (g) + YX(g)$$

$$\stackrel{\text{RHS}}{=} \frac{d}{dt} [(Yg) \circ \varphi_t] \Big|_{t=0} = X(Y(g))$$

und somit

$$\mathcal{L}_X Y = \frac{d}{dt} Y^{\varphi^{-t}} \Big|_{t=0} = XY - YX = [X, Y]$$

□

2.7.3 Lemma über die Lie-Ableitung von Lie-Klammern

Es seien X, Y, Z Vektorfelder auf M . Dann gilt

$$\mathcal{L}_X [Y, Z] = [\mathcal{L}_X Y, Z] + [Y, \mathcal{L}_X Z]$$

Beweis: Folgt aus Jacobi-Identität für Lie-Klammern.

2.7.4 Satz über Existenz paralleler Koordinaten

Es sei X ein Vektorfeld auf der n -dimensionalen Mannigfaltigkeit M . Ist $X_a \neq 0$ für einen bestimmten Punkt $a \in M$, so existiert eine Karte Ψ mit den Koordinaten x^i in einer Umgebung $U_a \subset M$ von a , so dass in dieser $X = \partial_{x^1}$ ist. Diese Koordinaten nennen wir zu X *parallele Koordinaten*.

Beweis: O.B.d.A sei $\psi^{-1}(a) = 0$ und $X_a^1 \neq 0$ in einer bestimmten Karte (ψ, x^i) . Betrachten wir das Anfangswertproblem

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{x}^1(t) \\ \tilde{x}^2(t) \\ \vdots \\ \tilde{x}^n(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} X^1_{\psi(\tilde{x}(t))} \\ X^2_{\psi(\tilde{x}(t))} \\ \vdots \\ X^n_{\psi(\tilde{x}(t))} \end{pmatrix}}_{f(\tilde{x}(t)) \text{ glatt}}, \quad \begin{pmatrix} \tilde{x}^1(0) \\ \tilde{x}^2(0) \\ \vdots \\ \tilde{x}^n(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$$

für bestimmte x^2, \dots, x^n , so existiert nach Lindelöf eine eindeutige Lösung für \tilde{x} die glatt von x^2, \dots, x^n, t abhängt. Haben somit eine glatte Abbildung

$$\Phi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, (t, x^2, \dots, x^n) \mapsto \tilde{x}(t)$$

gefunden. Ferner ist $\Phi : \mathcal{U}_a \rightarrow \Phi(\mathcal{U}_a)$ für geeignete Umgebung $0 \in \mathcal{U}_a \subset U$ bijektiv, denn

$$\frac{\partial \Phi}{\partial(t, x^2, \dots, x^n)} \Big|_0 = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial t} & \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^2} & \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^3} & \cdots & \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^n} \\ \frac{\partial \tilde{x}^2}{\partial t} & \frac{\partial \tilde{x}^2}{\partial x^2} & \frac{\partial \tilde{x}^2}{\partial x^3} & \cdots & \frac{\partial \tilde{x}^2}{\partial x^n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \tilde{x}^n}{\partial t} & \frac{\partial \tilde{x}^n}{\partial x^2} & \frac{\partial \tilde{x}^n}{\partial x^3} & \cdots & \frac{\partial \tilde{x}^n}{\partial x^n} \end{pmatrix} \Big|_0 = \begin{pmatrix} X_a^1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ X_a^2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_a^n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det \left(\frac{\partial \Phi}{\partial(t, x^2, \dots, x^n)} \Big|_0 \right) \stackrel{\text{Laplace}}{=} X_a^1 \neq 0$$

Die Abbildung

$$\tilde{\psi} := \psi \circ \Phi$$

ist also tatsächlich eine Karte in einer Umgebung $U_a = \psi(\mathcal{U}_a)$ von a in den Koordinaten \tilde{x}^i .

Behauptung: In diesen neuen Koordinaten ist $X = \partial_{\tilde{x}^1}$. Tatsächlich ist in U_a , wegen

$$d\Phi(1, 0, \dots, 0) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial(t, x^2, \dots, x^n)} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^1 & * & \cdots & * \\ X^2 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X^n & * & \cdots & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^n \end{pmatrix}$$

entsprechend

$$d\tilde{\psi}^{-1}(X) = d(\Phi^{-1} \circ \psi^{-1})(X) = d\Phi^{-1} \circ \underbrace{d\psi^{-1}(X)}_{(X^1, \dots, X^n)} = d\Phi^{-1}(X^1, \dots, X^n) = (1, 0, \dots, 0)$$

□

Bemerkung: Die Glattheit von X spielt hier eine wesentliche Rolle, denn sie bewirkt dass sogar auf einer ganzen Umgebung von a gilt $X \neq 0$. Ohne diese Sicherstellung würde Φ nicht mehr bijektiv auf einer Umgebung sein.

Veranschaulichung: Ausgehend von der Fläche $A_0 := \{x^1 = 0\} \subset M$ kann man in einer gewissen Umgebung U_a von a , durch den Fluss φ_t^X jeden Punkt $x \in U_a$ erreichen:

$$x = \varphi_s(a_0)$$

für geeignetes $a_0 \in A_0$ und $s \in \mathbb{R}$. Die dazu (eindeutige) benötigte Zeit s entspricht dann genau der 1. Koordinate im neuen Koordinatensystem, die Koordinaten x^2, \dots, x^n von a_0 den restlichen neuen Koordinaten (*). Tatsächlich ist dann auch:

$$X_x g = \frac{d}{dt} (g \circ \varphi_t(x)) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} (g \circ \varphi_{s+t}(a_0)) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} (g \circ \varphi_t(a_0)) \Big|_{t=s} = \frac{\partial}{\partial t} (g \circ \varphi_t(a_0)) \Big|_{t=s} \stackrel{(*)}{=} \partial_t g$$

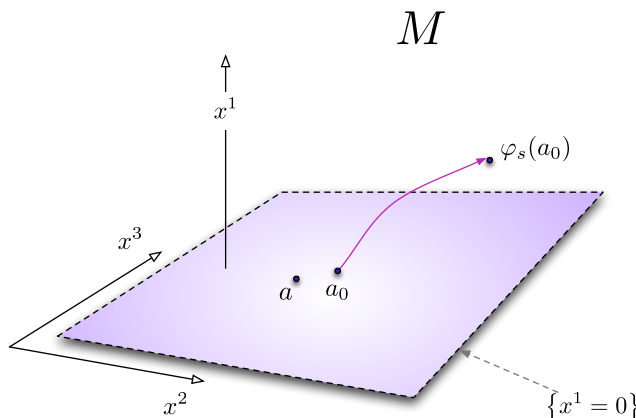


Abbildung 16: Zur Konstruktion paralleler Koordinaten.

2.7.5 Fluss und Lie-Ableitung in parallelen Koordinaten

Es sei $X \neq 0$ ein Vektorfeld auf (M, ψ, x^i) und o.B.d.A $X = \partial_{x^i}$ (vgl. Satz 2.7.4). Dann ist der (lokale) Fluss φ_t von X gegeben durch

$$\varphi_t(x^1, \dots, x^n) = (x^1 + t, x^2, \dots, x^n) \quad (28)$$

Für Vektorfeld Y ist dementsprechend

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X Y)_a &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dt} d_{\varphi_t(a)} \varphi_{-t} (Y_{\varphi_t(a)}) \Big|_{t=0} \stackrel{\psi}{\cong} \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{\partial \varphi_{-t}}{\partial x} \right) \Big|_{\varphi_t(a)} \begin{pmatrix} Y_{\varphi_t(a)}^1 \\ \vdots \\ Y_{\varphi_t(a)}^n \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{d}{dt} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{\varphi_t(a)}^1 \\ \vdots \\ Y_{\varphi_t(a)}^n \end{pmatrix} \right] \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} Y_{\varphi_t(a)}^1 \\ \vdots \\ Y_{\varphi_t(a)}^n \end{pmatrix} \Big|_{t=0} = \begin{pmatrix} \partial_{x^1} Y^1 \\ \vdots \\ \partial_{x^1} Y^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wollen nun erneut zeigen:

$$[X, Y] = \mathcal{L}_X Y$$

Da sowohl $[\cdot, \cdot]$ als auch \mathcal{L}_X^Y koordinatenunabhängig definiert wurden, genügt es die Gleichheit in einem speziellen Koordinatensystem zu zeigen, es sei also o.B.d.A $X = \partial_{x^i}$. Dann ist

$$[X, Y]^i \stackrel{(26)}{=} \sum_j \left[\underbrace{X^j}_{\delta_1^j} \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \underbrace{\frac{\partial X^i}{\partial x^j}}_{\frac{\partial \delta_1^i}{\partial x^j} = 0} \right] = \frac{\partial Y^i}{\partial x^1} = (\mathcal{L}_X Y)^i$$

Bemerkung: Die obigen Aussagen bezogen sich stets auf die Punktmenge $M^{\neq 0}$ wo $X \neq 0$ war. Für die Punktmenge

$$M^{\equiv 0} = \left\{ a \in M : \exists \text{ Umgebung } U(a) : X|_{U(a)} \equiv 0 \right\}$$

ist jedoch die Aussage ebenso klar, da sowohl $[X, Y]$ als auch $\mathcal{L}_X Y$ verschwinden. Doch die Menge

$$M^{\equiv 0} \cup M^{\neq 0}$$

ist dicht in M . Als glatte Felder, die auf einer in M dichten Menge übereinstimmen, stimmen $[X, Y]$ und $\mathcal{L}_X Y$ sogar auf ganz M überein.

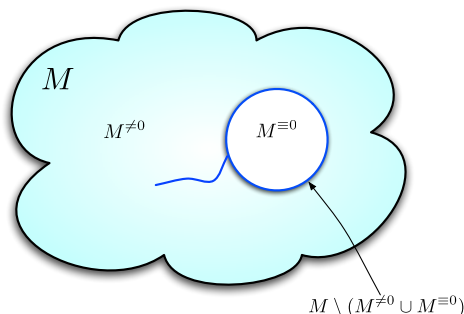


Abbildung 17: Zum Beweis von $[X, Y] = \mathcal{L}_X Y$

2.7.6 Lemma: Kommutativität lokaler Flüsse

Es seien $X \neq 0, Y$ Vektorfelder auf der n -dimensionalen Mannigfaltigkeit (M, ψ, x^i) und φ_t^X, φ_t^Y jeweils der (lokale) Fluss zu X und Y . Dann gilt:

$$[X, Y] = 0 \Leftrightarrow \varphi_t^X \circ \varphi_s^Y = \varphi_s^Y \circ \varphi_t^X$$

(falls sinnvoll).

Beweis: Sei $[X, Y] = 0$ und o.B.d.A $X = \partial_{x^1}$ und $n = 2$. Dann ist nach Lemma 2.6.14

$$Y_{x_1, x_2}^i = Y_{x_2}^i \quad (29)$$

das heißt die Koordinaten von Y sind unabhängig von x^1 . Für Punkt $a \in M$ (o.B.d.A $\psi^{-1}(a) = 0$) erfüllt die Abbildung

$$\tilde{\varphi}_s := \varphi_s^Y(t, 0) - \varphi_s^Y(0, 0) \text{ In Koordinatendarstellung}$$

das Anfangswertproblem

$$\tilde{\varphi}_0 = (t, 0)$$

$$\frac{d}{ds} \tilde{\varphi}_s^i = \left[\frac{d}{ds} \varphi_s^Y(t, 0) - \frac{d}{ds} \varphi_s^Y(0, 0) \right]^i = Y_{\varphi_s^Y(t, 0)}^i - Y_{\varphi_s^Y(0, 0)}^i$$

Tatsächlich ist eine (und somit die einzige) Lösung

$$\tilde{\varphi}_s \equiv (t, 0)$$

denn sie erfüllt den Anfangswert und

$$\frac{d}{ds} \tilde{\varphi}_s^i = 0 \stackrel{(29)}{=} \underbrace{Y_{\varphi_s^Y(t, 0)}^i}_{Y_{(t, 0) + \varphi_s^Y(0, 0)}^i} - Y_{\varphi_s^Y(0, 0)}^i$$

Somit ist

$$\varphi_s^Y \circ \varphi_t^X(0, 0) = \varphi_s^Y(t, 0) = \varphi_s^Y(0, 0) + (t, 0) = \varphi_t^X \circ \varphi_s^Y(0, 0)$$

Bemerkung: Der Fall $X = 0$ wird analog zu Abschnitt 2.7.5 behandelt.

□

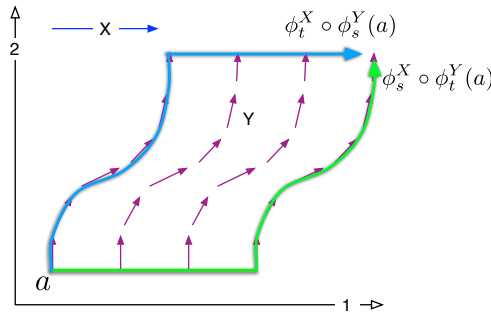


Abbildung 18: Zur Kommutativität der Flüsse zweier Vektorfelder im Fall $[X, Y] = 0$

Die Umkehrung folgt durch

$$[X, Y]_a g = X_a \left[\frac{d}{dt} g \circ \varphi_t^Y \right] - Y_a \left[\frac{d}{ds} g \circ \varphi_s^X \right] = \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial}{\partial t} g \circ \varphi_t^Y \circ \varphi_s^X(a) \Big|_{t,s=0} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial s} g \circ \underbrace{\varphi_s^X \circ \varphi_t^Y(a)}_{\varphi_t^Y \circ \varphi_s^X} \Big|_{t,s=0} = 0$$

2.7.7 Satz: Existenz paralleler Koordinaten (Verallgemeinerung)

Es sei M eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit und X_1, \dots, X_k Vektorfelder mit

$$[X_i, X_j] = 0$$

und X_{1_a}, \dots, X_{k_a} linear unabhängig in einem Punkt $a \in M$. Dann existieren Koordinaten $\rho^1, \dots, \rho^k, \dots, \rho^n$ in einer Umgebung $\underbrace{U_a}_{\ni a} \subset M$ so dass

$$X_i = \frac{\partial}{\partial \rho^i}, \quad i = 1, \dots, k$$

Beweis: Betrachten eine beliebige, zu den $\{X_{i_a}\}$ transversale, $(n-k)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit, das heißt mit einem Tangentialraum in einer Umgebung von a linear unabhängig von den X_i . Dies ist möglich, da man zu den X_{i_a} stets einen Satz linear unabhängiger Vektoren $Y_{(k+1)_a}, \dots, Y_{n_a} \in T_a M$ und eine Untermannigfaltigkeit $\underbrace{M^{n-k}}_{\ni a} \subset M$ mit $Y_{i_a} \in T_a M^{n-k}$

(und somit $T_a M^{n-k} = \text{span}\{Y_{i_a}\}$) finden kann⁶. Die Vektoren Y_{i_a} können auf M^{n-k} lokal fortgesetzt werden und bleiben aufgrund ihrer Stetigkeit auch in einer Umgebung von a weiterhin linear unabhängig zu den X_i .

Auf M^{n-k} seien die Koordinaten $\rho_{k+1}, \dots, \rho_n$ in einer Umgebung U_a von a definiert. Betrachten wir die Abbildung

$$\Phi : (-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \times \dots \times (-\varepsilon_k, \varepsilon_k) \times U_a \rightarrow M$$

definiert durch

$$\Phi(\rho^1, \dots, \rho^k, \underbrace{\rho^{k+1}, \dots, \rho^n}_{\ni b \in U_a}) := \varphi_{\rho^1}^{X_1} \circ \dots \circ \varphi_{\rho^k}^{X_k}(b)$$

(vgl. Satz über Kommutativität von Flüssen 2.7.6) mit den Flüssen φ^{X_i} zu den Vektorfeldern X_i , so ist Φ (lokal) bijektiv, denn wegen

$$d_a \Phi(0, \dots, 0, \underset{i}{\uparrow} 1, 0, \dots, 0) = X_{i_a}$$

$$d_a \Phi(0, \dots, 0, 0, \dots, 0, \underset{k+j}{\uparrow} 1, 0, \dots, 0) = \underbrace{\partial_{\rho^{k+j}}}_{\in T_a M^{n-k}}$$

bildet $d\Phi$ n linear unabhängige Vektoren auf n linear unabhängige Vektoren ab, ist also nicht ausgeartet. Somit existiert Φ^{-1} und in einer Umgebung $\tilde{U}_a \subset M$ von a kann man jedem Punkt b eindeutig die Koordinaten ρ^1, \dots, ρ^n zuschreiben:

$$\rho^1, \dots, \rho^n : \tilde{U}_a \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (\rho^1, \dots, \rho^n) := \Phi^{-1}$$

In diesen Koordinaten gilt nun

$$X_i = \partial_{\rho^i}, \quad i = 1, \dots, k$$

denn

$$X_{i_b}(\rho^j) = \frac{d}{dt} \underbrace{\rho^j \circ \varphi_t^{X_i}(b)}_{t\delta_{ij} + \rho^j(b)} \Big|_{t=0} = \delta_{ij}, \quad b \in \tilde{U}_a, \quad i = 1, \dots, k, \quad j = 1, \dots, n$$

□

2.7.8 Definition: Lie-Ableitung von Differentialformen

Es sei X ein Vektorfeld auf M , φ_t der zu X lokale Fluss und $\omega \in \Lambda^k M$ eine k -Form auf M . Dann definiert man die *Lie-Ableitung* von ω gemäß

$$\mathcal{L}_X \omega := \frac{d}{dt} (\varphi_t^* \omega) \Big|_{t=0}$$

das heißt

$$(\mathcal{L}_X \omega)_a(\xi_1, \dots, \xi_k) = \frac{d}{dt} [\omega_{\varphi_t(a)}(d_a \varphi_t \xi_1, \dots, d_a \varphi_t \xi_k)] \Big|_{t=0}$$

$\mathcal{L}_X \omega$ ist somit wieder eine k -Form auf M .

⁶Identifiziert man die Vektoren Y_{i_a} bzw. X_{i_a} mit ihrer Darstellung im \mathbb{R}^n , so ist dies leicht zu akzeptieren.

Beispiele:

- Es sei $X = \partial_{x^1}$, dazu 1-Form $\omega = \omega_i dx^i$. Dann ist

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{L}_X \omega)_a &= \frac{d}{dt} (\varphi_t^* \omega)_a \Big|_{t=0} \stackrel{(16)}{=} \frac{d}{dt} \left[(\omega_i \circ \varphi_t(a)) \underbrace{\frac{\partial \varphi_t^i}{\partial x^j} \Big|_a}_{\delta_j^i} dx_a^j \right] \Big|_{t=0} \\
 &= \frac{d}{dt} [(\omega_i \circ \varphi_t) dx_a^i] \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \underbrace{[\omega_i \circ \varphi_t(a)] \Big|_{t=0}}_{X\omega_i} \cdot dx^i = \frac{\partial \omega_i}{\partial x^1} \Big|_a dx^i
 \end{aligned}$$

- Für 0-Form $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ ist

$$\mathcal{L}_X f = df(X) = Xf \tag{30}$$

denn

$$(\mathcal{L}_X f)_a = \frac{d}{dt} (\varphi_t^* f)_a \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} (f \circ \varphi_t(a)) \Big|_{t=0} = X_a f$$

2.7.9 Eigenschaften der Lie-Ableitung

Es sei X ein Vektorfeld auf M .

1. Die Operation $\mathcal{L}_X : \Lambda^k M \rightarrow \Lambda^k M$ ist \mathbb{R} -linear.
2. Die Operation $X \mapsto \mathcal{L}_X \omega$ ist \mathbb{R} -linear in X .
3. Für Differentialformen $\omega^k \in \Lambda^k M$, $\omega^l \in \Lambda^l M$ ist

$$\mathcal{L}_X(\omega^k \otimes \omega^l) = (\mathcal{L}_X \omega^k) \otimes \omega^l + \omega^k \otimes (\mathcal{L}_X \omega^l)$$

und

$$\mathcal{L}_X(\omega^k \wedge \omega^l) = (\mathcal{L}_X \omega^k) \wedge \omega^l + \omega^k \wedge (\mathcal{L}_X \omega^l)$$

4. Für skalares Feld $f \in \mathcal{C}^\infty$ und Vektorfelder X, Y ist

$$\mathcal{L}_X(fY) = (\mathcal{L}_X f)Y + f(\mathcal{L}_X Y)$$

und

$$\mathcal{L}_{fX} Y = f\mathcal{L}_X Y + (\mathcal{L}_Y f)X$$

5. Für skalares Feld $f \in \mathcal{C}^\infty$ und Differentialform $\omega \in \Lambda^k M$ ist

$$\mathcal{L}_X(f\omega) = (\mathcal{L}_X f)\omega + f(\mathcal{L}_X \omega)$$

und

$$\mathcal{L}_{fX} \omega = f\mathcal{L}_X \omega + df \wedge i_X \omega$$

6. Für skalares Feld $f \in \mathcal{C}^\infty$ und Vektorfeld X ist

$$\mathcal{L}_X f = Xf$$

2.7.10 Anschauliche Interpretation der Lie-Ableitung

Betrachten eine Flussströmung ($\sim \varphi_t$ bzw. $\sim X$), dazu ein Teilchen das sich durch deren Einfluss auf dem Wasser fortbewegt. Der Raum sei ausgestattet mit einem Vektorfeld Y (z.B. Magnetfeld der Erde). Aufgrund der Bewegung des Teilchens, sieht das Teilchen ein sich ständig änderndes Feld Y . Die Lie-Ableitung

$$\mathcal{L}_X Y = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d_{\varphi_t} \varphi_{-t} Y_{\varphi_t} - Y}{t}$$

ist genau die zeitliche *Änderungsrate* des vom Teilchen beobachteten Feldes.

2.7.11 Lemma: Leibnizregel für Lie-Ableitung von Differentialformen

Es seien X, Y_1, \dots, Y_k Vektorfelder auf M und $\omega \in \Lambda^k M$ eine 1-Form. Dann gilt die Leibniz-Regel:

$$\mathcal{L}_X \underbrace{\omega(Y_1, \dots, Y_k)}_{\in \mathcal{C}^\infty} = (\mathcal{L}_X \omega)(Y_1, \dots, Y_k) + \sum_i \omega(Y_1, \dots, Y_{i-1}, \mathcal{L}_X Y_i, Y_{i+1}, \dots, Y_k)$$

Beweis: Betrachten nur Beweis für Fall $k = 1$. Sei $\omega \in \Lambda^k M$ und $X \neq 0$ ein Vektorfeld mit Fluss φ_t , o.B.d.A $X = \partial_{x^1}$ ⁷. Dabei besitzt ω die Darstellung

$$\omega = \omega_i dx^i, \quad \omega_i \in \mathcal{C}^\infty$$

Somit ist für Vektorfeld Y :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X \omega(Y) &= \frac{d}{dt} (\omega_{\varphi_t})(Y) = \frac{d}{dt} \left[\omega_{i\varphi_t} \underbrace{dx^i(Y)}_{Y^i_{\varphi_t}} \right] \Big|_{t=0} = \frac{d\omega_{i\varphi_t}}{dt} \Big|_{t=0} Y^i + \omega_i \frac{d}{dt} Y^i_{\varphi_t} \Big|_{t=0} \\ &= \frac{\partial \omega_i}{\partial x^1} \underbrace{Y^i}_{dx^i Y} + \omega_i \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^1} Y^i}_{\omega \left(\frac{\partial Y^i}{\partial x^1} \partial_i \right)} \stackrel{(2.7.5)}{=} (\mathcal{L}_X \omega) Y + \omega(\mathcal{L}_X Y) \end{aligned}$$

Der Fall $X = 0$ folgt ähnlich zu Abschnitt 2.7.5. \square

2.7.12 Folgerung über Koordinatenabhängigkeit von k -Formen

Es sei M eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit in den Koordinaten x^i und $\omega \in \Lambda^k M$ eine k -Form. Dann gilt $\mathcal{L}_{\partial_i} \omega = 0$ genau dann wenn sämtliche Komponenten von ω nicht von x^i abhängen (vgl. analoges Lemma 2.6.14 für Vektorfelder.).

Beweis:

$$(\mathcal{L}_{\partial_1} \omega)(\partial_{i_1}, \dots, \partial_{i_k}) = \mathcal{L}_{\partial_1} \omega(\partial_{i_1}, \dots, \partial_{i_k}) + \sum_{j=1}^k \omega \left(\partial_{i_1}, \dots, \partial_{i_{j-1}}, \underbrace{\mathcal{L}_{\partial_1} \partial_{i_j}}_0, \partial_{i_{j+1}}, \dots, \partial_{i_k} \right) \stackrel{(2.7.11)}{=} \partial_1 \omega_{i_1, \dots, i_k}$$

2.7.13 Darstellung von $\mathcal{L}_X \omega$

Bisher haben wir *Rechenforschriften* bzw. Darstellungsformeln für die Lie-Ableitung von Vektor- und Skalaren Feldern gesehen. Zu finden wäre nun auch eine einfache Rechenvorschrift für die Lie-Ableitung von k -Formen. Bekanntlich lässt sich jede k -Form $\omega \in \Lambda^k M$ darstellen durch

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

(vgl. Abschnitt 2.6.9). Zu finden wären somit die Komponenten $(\mathcal{L}_X \omega)_{i_1 \dots i_k}$ von $\mathcal{L}_X \omega$. Nach Lemma 2.7.11 ist

$$(\mathcal{L}_X \omega)_{i_1, \dots, i_k} = (\mathcal{L}_X \omega)(\partial_{i_1}, \dots, \partial_{i_k}) \stackrel{(2.7.11)}{=} \underbrace{\mathcal{L}_X \omega_{i_1 \dots i_k}}_{d\omega_{i_1, \dots, i_k}(X)} - \sum_m \omega(\partial_{i_1}, \dots, [X, \partial_{i_m}], \dots, \partial_{i_k})$$

Speziell wäre

$$(\mathcal{L}_X dx^i)_j = \underbrace{\mathcal{L}_X \delta_j^i}_0 - dx^i([X, \partial_j]) = -X^k \underbrace{\frac{\partial(\partial_j)^i}{\partial x^k}}_{\frac{\partial \delta_j^i}{\partial x^k} = 0} + \underbrace{(\partial_j)^k}_{\delta_j^k} \frac{\partial X^i}{\partial x^k} = \frac{\partial X^i}{\partial x^j}$$

$$d\mathcal{L}_X x^i = d[X(x^i)] = dX^i = \frac{\partial X^i}{\partial x^j} dx^j$$

⁷Dies ist keine Beschränkung der Allgemeinheit, da $\mathcal{L}_X \omega$ koordinatenunabhängig definiert wurde.

das heißt

$$\boxed{\mathcal{L}_X dx^i = dX^i = d\mathcal{L}_X x^i} \quad (31)$$

2.7.14 Definition: Innere Ableitung

Es sei X ein Vektorfeld auf M und $\omega \in \Lambda^k M$ eine k -Form. Dann definiert man die *innere Ableitung* $i_X \omega \in \Lambda^{k-1} M$ von ω nach X gemäß

$$i_X \omega(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}) := \omega(X, \xi_1, \dots, \xi_{k-1}) \quad , \quad \xi_i \in \mathcal{X}$$

Für 0-Form $\omega \in \mathcal{C}^\infty(M)$ setzt man $i_X \omega := 0$.

Bemerkung: Per Konstruktion hängt, im Gegensatz zu der äußeren und der Lie-Ableitung, die innere Ableitung $i_X \omega$ nur Punktweise von ω ab.⁸

2.7.15 Lemma: Laplace-Regel für innere Ableitung

Es seien $\omega^k \in \Lambda^k M$, $\omega^l \in \Lambda^l M$ Differentialformen auf M , dazu Vektorfeld X . Dann gilt

$$i_X(\omega^k \wedge \omega^l) = [i_X \omega^k] \wedge \omega^l + (-1)^k \omega^k \wedge [i_X \omega^l]$$

(vgl. Lemma 2.5.3)

2.7.16 Magic Cartan Formula

Es sei $\omega \in \Lambda^k M$ eine k -Form auf M , dazu Vektorfeld X . Dann gilt:

$$\mathcal{L}_X \omega = d[i_X \omega] + i_X d\omega$$

Beweis: Betrachten die k -Form

$$R_X(\omega) := d[i_X \omega] + i_X d\omega$$

Dann ist R_X \mathbb{R} -linear in ω . Für Differentialformen $\omega^k \in \Lambda^k$, $\omega^l \in \Lambda^l$ gilt:

$$R_X(\omega^k \wedge \omega^l) = (R_X \omega^k) \wedge \omega^l + \omega^k \wedge R_X \omega^l \quad (32)$$

denn

$$\begin{aligned} R_X(\omega^k \wedge \omega^l) &= d[i_X(\omega^k \wedge \omega^l)] + i_X d(\omega^k \wedge \omega^l) \\ &\stackrel{(2.7.15)}{=} d[(i_X \omega^k) \wedge \omega^l + (-1)^k \omega^k \wedge (i_X \omega^l)] + i_X [(d\omega^k) \wedge \omega^l + (-1)^k \omega^k \wedge d\omega^l] \\ &= d(i_X \omega^k) \wedge \omega^l + \cancel{(-1)^{k-1} (i_X \omega^k) \wedge d\omega^l} + \cancel{(-1)^k d\omega^k \wedge i_X \omega^l} + (-1)^{2k} \omega^k \wedge d(i_X \omega^l) \\ &\quad + i_X(d\omega^k) \wedge \omega^l + \cancel{(-1)^{k+1} d\omega^k \wedge i_X \omega^l} + \cancel{(-1)^k (i_X \omega^k) \wedge d\omega^l} + (-1)^{2k} \omega^k \wedge i_X d\omega^l \\ &= \underbrace{[d(i_X \omega^k) + i_X(d\omega^k)]}_{R_X \omega^k} \wedge \omega^l + \omega^k \wedge \underbrace{[d(i_X \omega^l) + i_X(d\omega^l)]}_{R_X \omega^l} \end{aligned}$$

Ferner ist

$$R_X(d\omega) = dR_X \omega \quad (33)$$

⁸Erinnerung: $\mathcal{L}_X \omega$ hing von dem Verhalten von ω in der Umgebung des jeweiligen Punktes ab.

denn

$$R_X(d\omega) = i_X \underbrace{dd\omega}_0 + d[i_X d\omega] = d[i_X d\omega] + \overbrace{dd[i_X \omega]}^0 = d \underbrace{[i_X d\omega + d(i_X \omega)]}_{R_X \omega}$$

Schließlich gilt für 0-Formen $\omega \in \Lambda^0 M$ die Gleichheit $R_X \omega = \mathcal{L}_X \omega$, denn

$$\mathcal{L}_X \omega = d\omega(X) = \overbrace{d[i_X \omega]}^0 + d\omega(X)$$

und somit auch die Gleichheit für 1-Formen $\omega \in \Lambda^1 M$, denn:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X(\omega_i dx^i) &= \underbrace{(\mathcal{L}_X \omega_i)}_{R_X \omega_i} dx^i + \omega_i \mathcal{L}_X dx^i \stackrel{(31)}{=} (R_X \omega_i) dx^i + \omega_i d\mathcal{L}_X x^i \\ &= (R_X \omega_i) dx^i + \omega_i dR_X x^i \stackrel{(33)}{=} (R_X \omega_i) dx^i + \omega_i R_X dx^i \stackrel{(32)}{=} R_X [\omega_i dx^i] \end{aligned}$$

Aus obigen Überlegungen folgt nun die Formel für allgemeine k -Formen, denn aus der Gültigkeit für $(m-1)$ -Formen, folgt auch die Gültigkeit für m -Formen:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X [\omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_m}] &= \underbrace{[\mathcal{L}_X (\omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1})]}_{R_X dx^{i_1}} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_m} + \omega_{i_1 \dots i_m} dx^{i_1} \wedge \underbrace{\mathcal{L}_X [dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_m}]}_{R_X [dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_m}]} \\ &\stackrel{(32)}{=} R_X [\omega_{i_1 \dots i_m} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_m}] \end{aligned}$$

2.7.17 Lemma über Tangentialräume von Untermannigfaltigkeiten

Es sei (M, ω) eine n -dimensionale symplektische Mannigfaltigkeit und $U \subset M$ eine $k < n$ dimensionale Untermannigfaltigkeit. Dann sind für Vektorfeld $X \in \mathcal{X}(M)$ folgende Aussagen äquivalent:

1. Für $a \in U$ ist stets $\varphi_t^X(a) \in U$ (Fluss von X bleibt in U)
2. Für $a \in U$ ist X_a Tangential zu U ($X_a \in T_a U$), das heißt $X_a f$ hängt nur von der Einschränkung von f auf U ab.
3. Ist

$$U = \{x \in M \mid H(x) = h_0 : \text{const}\}$$

für irgendein $H \in C^\infty(M)$ und $(dH)|_U \neq 0$, so gilt für $a \in U$ stets $X_a H = 0$.

Beweis:

1. **1** \rightarrow **2**: Es sei $a \in U$ und stets $\varphi_t^X(a) \in U$. Es genügt zu zeigen, ist $f|_U = 0$ so ist $X_a f = 0$. Tatsächlich ist

$$X_a f = \left. \frac{d}{dt} f(\underbrace{\varphi_t^X(a)}_{\in U}) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} f|_U(\underbrace{\varphi_t^X(a)}_0) \right|_{t=0} = 0$$

2. **2** \rightarrow **1**: Es sei $a \in U$ und X_a Tangential zu U . U sei ausgestattet mit den Koordinaten x^1, \dots, x^k und o.B.d.A $X = \partial_1 \in TU$. Dann erfüllt die Kurve $\gamma(t)$ definiert durch

$$\gamma : I \rightarrow U, \quad \gamma(t) := (x^1(a) + t, x^2(a), \dots, x^k(a))$$

die Bedingung $\gamma(0) = a$ und

$$\gamma'(t) = \partial_1 = X$$

das heißt es ist tatsächlich $\gamma(t) = \varphi_t^X(a)$.

3. **1** → **3**: Es sei $a \in U$. Dann gilt

$$X_a H = \frac{d}{dt} \underbrace{H(\underbrace{\varphi_t^X(a)}_{\in U})}_{h_0} \Big|_{t=0} = 0$$

4. **3** → **2**: Es sei

$$X_a H = 0, \quad d_a H \neq 0 \quad \forall \quad a \in U$$

Es genügt zu zeigen

$$f|_U \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad X_a f = 0$$

Schreiben

$$dH \circ X_a = X_a H = 0$$

das heißt $dH \perp X_a$ (als n -Tupel in Koordinatendarstellung im \mathbb{R}^n). Ist nun $f|_U = \text{const}$ so muss $df \perp T_a U$ sein. Wegen $dH \neq 0$ ist

$$\mathbb{R}^n \cong T_a U \oplus \text{span} \{dH\}$$

das heißt $df \parallel dH$ und somit auch $df \circ X_a = 0$

□

3 Symplektische Geometrie

3.1 Symplektische Mannigfaltigkeiten

3.1.1 Definition: Symplektische Mannigfaltigkeit

Eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit M , ausgestattet mit einer 2-Form $\omega \in \Lambda^2 M$ mit

- $d\omega = 0$ (ω geschlossen)
- $\forall x \in M, \forall 0 \neq \xi \in T_x M : i_\xi \omega_x \neq 0$, das heißt ω nicht ausgeartet

heißt *symplektische Mannigfaltigkeit*. Die Form ω heißt *symplektische Form* auf M .

3.1.2 Darstellung von symplektischen Formen

Alternativ zur schon bekannten Darstellung

$$\omega = \sum_{ij} a_{ij} dx^i \wedge dx^j$$

kann man die 2-Form ω mit der schiefsymmetrischen Matrix $\Omega \in \mathbb{R}^{n \times n}$ identifizieren, mit den Einträgen $\Omega_{ij} = \omega(\partial_i, \partial_j)$. Für Vektoren $\xi, \eta \in T_x M$ ergibt sich dann (in der entsprechenden Karte)

$$\omega(\xi, \eta) = (\xi^1, \dots, \xi^n) \cdot \Omega \cdot \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \vdots \\ \eta^n \end{pmatrix}$$

Somit ist ω genau dann nicht ausgeartet, wenn

$$(\xi^1, \dots, \xi^n) \cdot \Omega \neq 0 \quad \forall \xi \neq 0$$

das heißt Ω ist nicht ausgeartet.

3.1.3 Dimension symplektischer Mannigfaltigkeiten

Aus $\det \Omega \neq 0$ folgt insbesondere dass die Dimension n von M **gerade** sein muss, denn

$$\det \Omega = \det \Omega^T = \det(-\Omega) = (-1)^n \underbrace{\det \Omega}_{\neq 0} \Rightarrow (-1)^n = 1$$

3.1.4 Beispiele symplektischer Mannigfaltigkeiten

Beispiel 1: Die Mannigfaltigkeit M in den Koordinaten $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ ausgestattet mit der 2-Form

$$\omega := dq \wedge dp := \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i$$

ist eine symplektische Mannigfaltigkeit. Tatsächlich ist in den entsprechenden Koordinaten

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & & & 1 \\ -1 & & & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & -1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \Omega \neq 0 \quad (34)$$

($d\omega = 0$ ist klar).

Beispiel 2: Zu jeder n -dimensionalen Mannigfaltigkeit (M, ψ, x^i) mit n gerade, ist das *kotangentialbündel* T^*M definiert gemäß

$$T^*M := \bigcup_{x \in M} T_x^*M$$

mit den Kotangentialräumen $T_x^*M := (T_x M)^*$ (Dual zu $T_x M$). Analog zum Tangentialbündel TM , ist auch T^*M eine $2n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit mit Elementen (x, ρ) wobei $\rho \in T_x^*M$, in den Koordinaten

$$(x^1, \dots, x^n, \underbrace{\rho(\partial_1)}_{\rho_1}, \dots, \rho(\partial_n))$$

Betrachten nun die Abbildung

$$\Pi : T^*M \rightarrow M \quad , \quad \Pi(T_x^*M) = \{\psi(x)\}$$

das heißt

$$\Pi(x^1, \dots, x^n, \rho_1, \dots, \rho_n) = (x^1, \dots, x^n)$$

Durch diese sei die so genannte *tautologische 1-Form* $\Theta \in \Lambda^1 T^*M$ auf T^*M definiert gemäß

$$\Theta_{(x, \rho)} := \Pi^*(\rho) \quad \text{für} \quad \rho \in T_x^*M$$

Zur Erinnerung sei erwähnt:

$$\Pi^*(\rho)(\xi) = \rho(d\Pi(\xi))$$

wobei in den Koordinaten der Mannigfaltigkeit

$$d\Pi = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

das heißt

$$\Pi^*(\rho)(\xi^x, \xi^\rho) = \rho(d\Pi(\xi^x, \xi^\rho)) = \rho(\xi^x) \stackrel{(9)}{=} \underbrace{(\rho_1 dx^1 + \dots + \rho_n dx^n)}_{\Theta_{(x, \rho)}} \xi^x \Rightarrow \Theta = \sum_{i=1}^n \rho_i dx^i$$

Definieren nun die auf T^*M symplektische Form $\omega := d\Theta \in \Lambda^2 T^*M$. Tatsächlich ist $d\omega = dd\Theta = 0$ und wegen

$$\omega = d\Theta \stackrel{(19)}{=} \sum_{i=1}^n d\rho_i \wedge dx^i$$

analog zu vorhin nicht ausgeartet.

3.2 Hamiltonsche Vektorfelder

3.2.1 Anmerkung: Identifizierung von TM mit T^*M

Es sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit. Dann wird durch ω eine kanonische Identifizierung von TM mit T^*M induziert, wobei diese Punktweise zwischen $T_x M$ und T_x^*M stattfindet:

Jedem Vektor $\xi \in T_x M$ wird die Linearform $i_\xi \omega_x \in T_x^*M$, definiert durch

$$T_x M \xrightarrow{i_{\omega_x}} T_x^*M \quad , \quad i_{\omega_x} \xi := i_\xi \omega_x = \omega_x(\xi, \cdot) \quad , \quad \xi, \eta \in T_x M$$

zugeordnet (vgl. innere Ableitung 2.7.14). Diese (lineare) Zuordnung von $T_x M$ nach T_x^*M ist (für jedes feste x) bijektiv, da per Definition von ω gilt:

$$\text{kernel } i_{\omega_x} = \{0\}$$

Durch punktweise Definition über M wird so **bijektiv** einem Vektorfeld X auf M die 1-Form $i_X \omega \in \Lambda^1 M$ zugeordnet:

$$\mathcal{X} \xrightarrow{i_\omega} \Lambda^1 M \quad , \quad X \mapsto i_X \omega = \omega(X, \cdot)$$

Die Umkehrung dieser Zuordnung i_ω ergibt sich durch

$$(i_X\omega)(Y) = (X^1, \dots, X^n) \cdot \Omega \cdot \begin{pmatrix} Y^1 \\ \vdots \\ Y^n \end{pmatrix} = \underbrace{X^i \Omega_{ij}}_{\nu_j} Y^j \Rightarrow i_X\omega = \nu_j dx^j$$

und

$$\begin{pmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^n \end{pmatrix} = \overbrace{(\Omega^T)^{-1} \Omega^T (X^1, \dots, X^n)^T}^{(\Omega^T)^{-1} \cdot [(X^1, \dots, X^n) \cdot \Omega]^T} = (\Omega^T)^{-1} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_n \end{pmatrix}$$

gemäß

$$\nu = \nu_i dx^i \xrightarrow{i_\omega^{-1}} (\Omega^T)^{-1} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_n \end{pmatrix} \quad (35)$$

für beliebiges $\nu \in \Lambda^1 M$.

3.2.2 Definition: Hamiltonsches Vektorfeld

Es sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit. Dann definiert man zur *Hamilton-Funktion* $H \in C^\infty(M)$ das *Hamilton-Vektorfeld* X_H gemäß

$$X_H := i_\omega^{-1}(dH)$$

Bemerke: Tatsächlich ist wegen $dH \in \Lambda^1 M$ und obiger Anmerkung (3.2.1) X_H wohldefiniert, und erfüllt per Konstruktion

$$\omega(X_H, \cdot) = dH$$

3.2.3 Korollar: Koordinatendarstellung von X_H

Nach Gl. 35 besitzt X_H in den entsprechenden Koordinaten x^i die Darstellung

$$\begin{pmatrix} X_H^1 \\ \vdots \\ X_H^n \end{pmatrix} = (\Omega^T)^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial x^n} \end{pmatrix} \quad (36)$$

Folgerungen:

1. Insbesondere folgt dass die Zuordnung $H \mapsto X_H$ \mathbb{R} -linear in H ist.
2. Für Felder H_1, \dots, H_k sind an einem Punkt a die Differentiale $d_a H_i$ genau dann linear unabhängig, wenn dort auch die Vektorfelder X_{H_1}, \dots, X_{H_n} linear unabhängig sind. Dies folgt aus der Tatsache dass bijektive Endomorphismen (hier $(\Omega^T)^{-1}$) linear unabhängige Vektoren auf linear unabhängige Vektoren abbilden.

Speziell: Für Hamilton Funktion H gilt

$$X_H \equiv 0 \Leftrightarrow H : \text{const} \quad (37)$$

3. Jedes Hamiltonsche Vektorfeld X_H besitzt die Darstellung

$$X_H = \sum_{j=1}^n \frac{\partial H}{\partial x^k} X_{x^k} \quad (38)$$

Beweis: Da die x^i Koordinaten sind, sind insbesondere die dx^i linear unabhängig, also auch die X_{x^i} . Somit gilt die Darstellung

$$X_H = \sum_k X_H^k X_{x^k}$$

wobei

$$\frac{\partial H}{\partial x^k} = \partial_{x^k} H \stackrel{\text{def.}}{=} \omega(X_H, \partial_{x^k}) = \sum_j X_H^j \underbrace{\omega(X_{x^j}, \partial_{x^k})}_{\partial_{x^k}(x^j)} = \sum_j X_H^j \delta_{jk} = X_H^k$$

□

Beispiel: Betrachten den R^{2n} in den Koordinaten $(q^1, \dots, q^n, p^1, \dots, p^n)$ mit der symplektischen Form

$$\omega := dq \wedge dp := \sum_{i=1}^n dq^i \wedge dp^i$$

Zu $H \in C^\infty(M)$ ist dann X_H das Vektorfeld in den Koordinaten

$$X_H = \left(\frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_n}, -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial q_n} \right) \quad (39)$$

Tatsächlich ist

$$\omega(X_H, Y) = \sum_i dq^i \wedge dp^i(X_H, Y) = \sum_i \left[dq^i(X_H) dp^i(Y) - dp^i(X_H) dq^i(Y) \right] = \sum_i \left[\frac{\partial H}{\partial p_i} Y^{n+i} + \frac{\partial H}{\partial q_i} Y^i \right] = dH(Y)$$

für beliebiges $Y \in \mathcal{X}$. Betrachten nun den Fluss $\varphi_t^{X_H}$ zu X_H . Zu lösen wäre das DGL-System

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} q^1 \\ \vdots \\ q^n \\ p^1 \\ \vdots \\ p^n \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} X_H^1 \\ \vdots \\ X_H^{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial p_n} \\ -\frac{\partial H}{\partial q_1} \\ \vdots \\ -\frac{\partial H}{\partial q_n} \end{pmatrix}$$

was genau den *Hamilton-Differentialgleichungen* entspricht! (vgl. Gl. 2).

3.2.4 Satz: Energieerhaltung

Es sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit und $H \in C^\infty(M)$. Dann gilt

$$X_H(H) \equiv 0$$

das heißt H ändert sich entlang des Flusses $\varphi_t^{X_H}$ von X_H nicht.

Beweis: Für $f \in C^\infty(M)$ gilt per Konstruktion

$$X_f(H) = dH(X_f) = \omega(X_H, X_f)$$

Speziell für $f = H$ also

$$X_H(H) = \omega(X_H, X_H) \stackrel{\omega \text{ schief-symm.}}{=} 0$$

□

3.2.5 Satz über $L_{X_H} \omega$

Es sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit und $H \in C^\infty(M)$, dazu das Hamiltonsche Vektorfeld X_H . Dann gilt

$$\mathcal{L}_{X_H} \omega \equiv 0$$

Beweis: Mit der Magic-Cartan-Formula (2.7.16) folgt

$$\mathcal{L}_{X_H} \omega = i(X_H) \underbrace{d\omega}_0 + d \underbrace{[i_{X_H} \omega]}_{dH} = ddH = 0$$

□

3.2.6 Satz über $\mathcal{L}_{X_H} dH$

Es sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit und $H \in \mathcal{C}^\infty(M)$, dazu das Hamiltonsche Vektorfeld X_H . Dann gilt:

$$\mathcal{L}_{X_H} dH = 0$$

Beweis: Mit der Magic-Cartan-Formula (2.7.16) folgt

$$\mathcal{L}_{X_H} dH = d[\underbrace{i_{X_H} dH}_{dH(X_H)=0}] + i_{X_H} \underbrace{ddH}_0 = 0$$

□

3.2.7 Satz: Volumenerhaltung

Es sei M eine $2n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit mit Karte ψ , in den Koordinaten $(q^1, \dots, q^n, p^1, \dots, p^n)$, dazu symplektische Form

$$\omega := dq \wedge dp := \sum_{i=1}^n dq^i \wedge dp^i$$

und $H \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Dann ist der Fluss $\varphi_t^{X_H}$ zu dem Hamiltonschen Vektorfeld X_H Volumenerhaltend, das heißt für $\Omega \subset M$ und beliebige Zeiten t gilt:

$$\text{Vol } \varphi_t^{X_H}(\Omega) = \text{Vol } \Omega$$

wobei zu verstehen ist

$$\text{Vol } \Omega := \text{Vol } \underbrace{\psi(\Omega)}_{\subset \mathbb{R}^{2n}}$$

Beweis: Zu zeigen wäre

$$\mathcal{L}_{X_H} \overbrace{dq^1 \wedge \dots \wedge dq^n \wedge dp^1 \wedge \dots \wedge dp^n}^V = 0$$

Mit

$$\begin{aligned} \overbrace{\omega \wedge \dots \wedge \omega}^{\times n} &= \left[\sum_{i_1=1}^n dq^{i_1} \wedge dp^{i_1} \right] \wedge \dots \wedge \left[\sum_{i_n=1}^n dq^{i_n} \wedge dp^{i_n} \right] \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_n} \underbrace{(dq^{i_1} \wedge dp^{i_1}) \wedge \dots \wedge (dq^{i_n} \wedge dp^{i_n})}_0 \\ &\quad \text{für } i_j \neq i_k, j \neq k \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} (dq^{\sigma(1)} \wedge dp^{\sigma(1)}) \wedge \dots \wedge (dq^{\sigma(n)} \wedge dp^{\sigma(n)}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \underbrace{\chi(\sigma)^2}_1 \underbrace{(dq^1 \wedge dp^1) \wedge \dots \wedge (dq^n \wedge dp^n)}_{(-1)^{n-3} dq^1 \wedge \dots \wedge dq^n \wedge dp^1 \wedge \dots \wedge dp^n} \\ &= (-1)^{n-1} \cdot n! \cdot V \end{aligned}$$

folgt nach Lemma 3.2.5:

$$(-1)^{n-1} n! \cdot \mathcal{L}_{X_H} V = \mathcal{L}_{X_H} (\omega \wedge \dots \wedge \omega) = \underbrace{(\mathcal{L}_{X_H} \omega)}_0 \wedge \omega \wedge \dots \wedge \omega + \dots + \omega \wedge \dots \wedge \omega \wedge \underbrace{\mathcal{L}_{X_H} \omega}_0 = 0$$

□

3.2.8 Satz über $\mathcal{L}_X\omega$

Es sei $\mathcal{L}_X\omega = 0$ für Vektorfeld X auf der symplektischen Mannigfaltigkeit (M, ω) . Dann gilt:

$$\forall a \in M : \exists \text{ Umgebung } \underbrace{U_a}_{\ni a} \subset M, H : U_a \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } X = X_H$$

Bemerkung: Die *Lokalität* der Aussage ist wichtig!

Beweis: Mit der Magic-Cartan-Formula folgt

$$0 = \mathcal{L}_X\omega = i_X \underbrace{d\omega}_0 + d[i_X\omega] = d[i_X\omega]$$

Nach dem Lemma von Poincaré⁹ existiert für jeden Punkt $a \in M$ eine Umgebung $U_a \subset M$ und skalares Feld $H \in \mathcal{C}^\infty(U_a)$ so dass $i_X\omega = dH$, das heißt $X = X_H$.

3.2.9 Definition: Poisson-Klammer

Es sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit. Dann definiert man die *Poisson-Klammer*

$$\{\cdot, \cdot\} : \mathcal{C}^\infty(M) \times \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$$

gemäß

$$\{H, F\} := \omega(X_H, X_F) \quad , \quad H, F \in \mathcal{C}^\infty(M)$$

Verschwimmt die Poisson-Klammer $\{F, H\}$ zweier Funktionen $F, H \in \mathcal{C}^\infty$, so sagt man F und H *kommutieren*.

3.2.10 Lemma: Darstellung der Poisson-Klammer

Es sei (M, ω) eine n -dimensionale symplektische Mannigfaltigkeit. Dann besitzt die Poisson-Klammer die Darstellungen

$$\{H, F\} = \left(\frac{\partial F}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x^n} \right) \cdot (\Omega^{-1}) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial x^n} \end{pmatrix}$$

und

$$\{H, F\} = \sum_{i=1}^n \{H, x^i\} \frac{\partial F}{\partial x^i} = \sum_{i,j=1}^n \{x^j, x^i\} \frac{\partial H}{\partial x^j} \frac{\partial F}{\partial x^i} \quad (40)$$

Beweis: Nach Gl. 36 nehmen für H, F die Vektorfelder X_H, X_F die Darstellungen

$$X_H \cong (\Omega^T)^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial x^n} \end{pmatrix} \quad , \quad X_F \cong (\Omega^T)^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x^n} \end{pmatrix}$$

an, das heißt

$$\begin{aligned} \omega(X_H, X_F) &= (X_H^1, \dots, X_H^n) \cdot \Omega \cdot \begin{pmatrix} X_F^1 \\ \vdots \\ X_F^n \end{pmatrix} = \left[\left(\frac{\partial H}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial x^n} \right) \cdot \underbrace{((\Omega^T)^{-1})^T}_{\Omega^{-1}} \right] \cdot \Omega \cdot \left[(\Omega^T)^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x^n} \end{pmatrix} \right] \\ &= \left(\frac{\partial H}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial x^n} \right) \cdot (\Omega^T)^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x^n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

⁹Vgl. Übungsserie 03. Dort wurde der Satz zwar nur für $M = \mathbb{R}^n$ bewiesen, doch kann er in lokaler Version leicht auf beliebige Mannigfaltigkeiten verallgemeinert werden.

Mit

$$\{H, F\} = \omega(X_H, X_F) = -X_H F \stackrel{(24)}{=} \sum_i -X_H(x^i) \frac{\partial F}{\partial x^i} = \sum_i \{H, x^i\} \frac{\partial F}{\partial x^i}$$

folgt die 2. Darstellung.

Beispiel: Für $2n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit M in den Koordinaten $(q^1, \dots, q^n, p^1, \dots, p^n)$ und der symplektischen Form

$$\omega := dq \wedge dp$$

ist

$$\{H, F\} = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial F}{\partial p^i} - \frac{\partial H}{\partial p^i} \frac{\partial F}{\partial q^i} \right\}$$

denn mit

$$\Omega \stackrel{(34)}{=} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & & & 1 \\ -1 & & & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & -1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (41)$$

folgt nach Lemma 3.2.10:

$$\{H, F\} = \left(\frac{\partial F}{\partial q^1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial q^n}, \frac{\partial F}{\partial p^1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial p^n} \right) \cdot (\Omega)^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial q^n} \\ \frac{\partial H}{\partial p^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial p^n} \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{\text{speziell}}{\Omega^{-1} = -\Omega} \sum_{i=1}^n \left\{ -\frac{\partial H}{\partial p^i} \frac{\partial F}{\partial q^i} + \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial F}{\partial p^i} \right\}$$

3.2.11 Lemma: Eigenschaften der Poisson-Klammer

Es sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit. Dann gilt:

a) $\{H, F\}$ ist \mathbb{R} -linear in H und F .

Beweis: Aus der \mathbb{R} -Linearität von X_H in H folgt auch die \mathbb{R} -Linearität von $\{H, F\}$.

b) Antisymmetrie: $\{H, F\} = -\{F, H\}$ und $X_F(H) = -X_H(F)$

Beweis:

$$\{H, F\} \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{\omega(X_H, X_F)}_{X_F(H)} = -\underbrace{\omega(X_F, X_H)}_{X_H(F)} = -\{F, H\}$$

c) **Jacobi-Identität:**

$$\{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} = 0 \quad , \quad A, B, C \in \mathcal{C}^\infty(M) \quad (42)$$

Beweis: Zeigen zunächst, dass jeder der drei Terme in der Identität aus Summanden besteht, die jeweils mindestens eine 2. Ableitung von A, B oder C enthalten. Betrachten dazu o.B.d.A den Term

$$\{C, \{A, B\}\} = -X_C \{A, B\}$$

Setzen nun o.B.d.A $X_C = \partial_1$ (vgl. Satz 2.7.4), so dass wegen $\mathcal{L}_{X_C}\omega = 0$ nach Folgerung 2.7.12 die Komponenten von ω nicht von ∂_1 abhängen. Dementsprechend hängen auch keine Komponenten von Ω^{-1} von x^1 ab, so dass wir schreiben können

$$X_C \{A, B\} \stackrel{(3.2.10)}{=} \partial_1 \left[\frac{\partial A}{\partial x^i} (\Omega^{-1})^j_i \frac{\partial B}{\partial x^j} \right] = (\Omega^{-1})^j_i \partial_1 \underbrace{\left[\frac{\partial A}{\partial x^i} \frac{\partial B}{\partial x^j} \right]}_{\substack{\text{enthält} \\ \text{2. Ableitungen} \\ \text{von } A \text{ oder } B}}$$

Zu klären bleibt: Welche Terme in Gl. 42 enthalten 2. Ableitungen von A ? Der Term

$$\{A, \{B, C\}\}$$

liefert nach Darstellungslemma 3.2.10 höchstens 1. Ableitungen von A . Doch auch der Term

$$\underbrace{\{B, \{C, A\}\}}_{\{B, -X_C(A)\}} + \underbrace{\{C, \{A, B\}\}}_{\{C, X_B A\}} = X_B X_C A - X_C X_B A = [X_B, X_C](A)$$

liefert nur 1. Ableitungen von A . Somit verschwinden alle 2. Ableitungen von A in Gl. 3.2.10. Analoge Überlegungen gelten natürlich auch für B, C , womit die Aussage bewiesen ist.

□

3.2.12 Korollar: Poisson-Klammer für konstante Hamilton-Funktionen

Es sei (M, ω) symplektisch und $H \in C^\infty(M)$ mit $d_a H = 0$. Dann ist

$$\{H, F\}_a = 0$$

für beliebiges Feld $F \in C^\infty$.

Beweis: Folgt direkt aus Darstellung 40.

3.2.13 Korollar: Poisson-Klammer für Koordinaten

Es sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit in den Koordinaten x^1, \dots, x^n . Dann ist

$$\{x^i, x^j\} = (\Omega^{-1})^j_i$$

mit der Matrix-Darstellung Ω von ω in den Koordinaten x^i .

Beweis: Aus Darstellungsformel 3.2.10 folgt direkt

$$\{x^i, x^j\} = (0, \dots, 0, \underset{j}{\uparrow} 1, 0, \dots, 0) \cdot \Omega^{-1} \cdot (0, \dots, 0, \underset{i}{\uparrow} 1, 0, \dots, 0)^T = (\Omega^{-1})^j_i$$

□

Beispiel: Eine symplektische Form ω auf der Mannigfaltigkeit (M, ω) in Koordinaten $q^1, \dots, q^n, p^1, \dots, p^n$ besitzt genau dann die Form

$$\omega = \sum_{i=1}^n dq^i \wedge dp^i$$

falls gilt:

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}, \quad \{p_i, p_j\} = 0 = \{q_i, q_j\}$$

3.2.14 Definition: Integrales Feld

Es sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit und $H \in C^\infty(M)$. Dann heißt $F \in C^\infty(M)$ zu X_H *integral*, falls gilt

$$X_H(F) = 0$$

Anschaulich: F ist entlang des Flusses $\varphi_t^{X_H}$ von X_H konstant, das heißt

$$F(x) = F\left[\varphi_t^{X_H}(x)\right] \quad \forall x \in M$$

Beispiel: H ist integral zu X_H .

3.2.15 Lemma über integrale Felder

Es seien $A, B \in C^\infty$ integral zum Hamiltonschen Vektorfeld X_H auf der symplektischen Mannigfaltigkeit (M, ω) , das heißt

$$\{H, A\} = 0 = \{H, B\}$$

Dann ist auch die Poisson-Klammer $\{A, B\}$ integral zu X_H , das heißt

$$\{H, \{A, B\}\} = 0$$

Beweis: Aus der Jacobi-Identität folgt

$$\{H, \{A, B\}\} = -\underbrace{\{A, \{B, H\}\}}_0 - \underbrace{\{B, \{H, A\}\}}_0 = 0$$

□

3.2.16 Lemma über die Lie-Klammer Hamiltonscher Vektorfelder

Es sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit und $B, C \in C^\infty(M)$. Dann gilt

$$[X_B, X_C] = -X_{\{B, C\}}$$

und

$$[X_B, X_C] = 0 \Leftrightarrow \{B, C\} : \text{const}$$

Somit ist insbesondere die Zuordnung $H \mapsto X_H$ ein Antihomomorphismus zwischen den Lie-Algebren $(C^\infty(M), \{\cdot, \cdot\})$ und $(\mathcal{X}(M), [\cdot, \cdot])$.

Beweis: Zu zeigen wäre

$$[X_B, X_C](A) = -X_{\{B, C\}}A$$

für beliebiges $A \in C^\infty(M)$. Tatsächlich gilt aufgrund der Jacobi-Identität:

$$X_{\{B, C\}}A = \{A, \{B, C\}\} = \{\{A, B\}, C\} - \{\{A, C\}, B\} = X_C X_B A - X_B X_C A = [X_C, X_B](A)$$

Kommutieren nun die Vektorfelder X_B, X_C so folgt

$$0 = [X_B, X_C] = -X_{\{B, C\}} \stackrel{(37)}{\Rightarrow} \{B, C\} : \text{const}$$

Andererseits ist $X_{\text{const}} = 0$. □

3.3 Der Satz von Darboux

3.3.1 Satz von Darboux in $\dim = 2$

Es sei M eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit in den Koordinaten (x, y) und

$$\omega_{(x,y)} = f(x, y) dx \wedge dy$$

eine symplektische 2-Form. Dann existiert ein lokales Koordinatensystem (q, p) mit

$$\omega = dq \wedge dp$$

Beweis: Siehe allgemeineren Satz 3.3.2.

3.3.2 Satz von Darboux in $\dim = 2n$

Sei (M, ω) eine $2n$ -dimensionale, symplektische Mannigfaltigkeit. Dann existiert zu jedem Punkt $a \in M$, eine Karte

$$\Psi : \underbrace{U_a}_{\ni a} \subset M \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$$

in den Koordinaten $\{q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n\}$ so dass

$$\omega = dq \wedge dp := \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i$$

Solche Koordinaten nennt man *symplektisch* oder *Darboux-Koordinaten*.

Beweis

Es stellt sich die Frage, wie die Koordinaten q_i, p_i aussehen. Zum einen müssen die Differentiale dq_i, dp_i linear unabhängig sein, da Ψ bijektiv. Nach Korollar 3.2.13 sind sie außerdem charakterisiert durch

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}, \quad \{p_i, p_j\} = 0 = \{q_i, q_j\} \quad (43)$$

Beweis in $\dim = 2$: Es sei (M, ω) 2-dimensional, symplektisch und $q \in C^\infty(M)$ so dass $d_a q \neq 0$ (da q glatt, ist auch $dq \neq 0$ in einer Umgebung von a). Betrachten nun den Fluss X_q und führen Koordinaten p, ρ ein, so dass

$$\partial_p = -X_q$$

ist (vgl. Existenz spezieller Koordinaten 2.7.4). Dann sind (q, p) die gesuchten Koordinaten, denn:

- dq, dp sind linear unabhängig, denn: Wegen

$$dq(X_q) \stackrel{(3.2.4)}{=} 0$$

$$dp(X_q) = X_q(p) = -\partial_p(p) = -1$$

würde

$$\lambda dq + \mu dp = 0$$

implizieren:

$$0 = \lambda dq(X_q) + \mu dp(X_q) = -\mu \stackrel{dq \neq 0}{\implies} \lambda = 0$$

- Die Koordinaten q, p erfüllen tatsächlich die Bedingungen 43, denn wegen Antisymmetrie von $\{\cdot, \cdot\}$ ist $\{p, p\} = \{q, q\} = 0$ und außerdem:

$$\{q, p\} = -dp(X_q) = 1$$

Durch vollständige Induktion erfolgt nun der Beweis für $\dim = 2n$.

Induktionsschritt $(n-1) \mapsto n$: Es sei (M^{2n}, ω) $2n$ -dimensional, symplektisch und $q_1 \in \mathcal{C}^\infty(M)$ mit $d_a q_1 \neq 0$. Analog zu vorhin setzen wir auch hier $p_1 \in \mathcal{C}^\infty$ so, dass $\partial_{p_1} = -X_{q_1}$. Demnach sind dq_1, dp_1 linear unabhängig und erfüllen

$$\{q_1, p_1\} = 1$$

Betrachten nun die $(2n-2)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit $M^{2n-2} \subset M^{2n}$, definiert durch

$$M^{2n-2} := \{x \in M : q_1(x) = q_1(a), p_1(x) = p_1(a)\}$$

Dann gilt:

- Es ist $TM^{2n} = TM^{2n-2} \oplus \text{span}\{X_{q_1}, X_{p_1}\}$

Beweis: Da die dq_1, dp_1 linear unabhängig sind, sind auch die X_{q_1}, X_{p_1} linear unabhängig, das heißt

$$\dim \text{span}\{X_{q_1}, X_{p_1}\} = 2$$

Es genügt also zu zeigen dass

$$\text{span}\{X_{q_1}, X_{p_1}\} \cap TM^{2n-2} = \{0\}$$

Tatsächlich ist:

$$\left. \begin{array}{l} (\lambda X_{q_1} + \mu X_{p_1})(q_1) = \mu \\ (\lambda X_{q_1} + \mu X_{p_1})(p_1) = -\lambda \end{array} \right\} \Rightarrow \forall (\lambda, \mu) \neq 0 : \underbrace{(\lambda X_{q_1} + \mu X_{p_1}) \begin{pmatrix} q_1 \\ p_1 \end{pmatrix}}_{\Rightarrow \lambda X_{q_1} + \mu X_{p_1} \notin TM^{2n-2}} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Wegen $d\omega|_{M^{2n-2}} = 0$ ist auch $d(\omega|_{M^{2n-2}}) = 0$
- $\omega|_{M^{2n-2}}$ ist nicht ausgeartet, denn:

$$\begin{aligned} \forall \xi \in \underbrace{TM^{2n-2}}_{\subset TM^{2n}} : \exists \eta = \underbrace{\tilde{\eta}}_{\in TM^{2n-2}} + \lambda X_{q_1} + \mu X_{p_1} \in TM^{2n} : \omega(\xi, \eta) \neq 0 \\ \Rightarrow \omega(\xi, \tilde{\eta}) = \underbrace{\omega(\xi, \eta)}_{\neq 0} + \lambda \underbrace{\omega(\xi, X_{q_1})}_{-\xi(q_1)=0} + \mu \underbrace{\omega(\xi, X_{p_1})}_{-\xi(p_1)=0} \neq 0 \end{aligned}$$

Somit ist insbesondere $(M^{2n-2}, \omega|_{M^{2n-2}})$ eine symplektische Untermannigfaltigkeit. Nach Induktionsvoraussetzung existieren nun auf M^{2n-2} symplektische Koordinaten $q_2, \dots, q_n, p_2, \dots, p_n : M^{2n-2} \rightarrow \mathbb{R}$. Ziel ist es nun diese auf die Mannigfaltigkeit M^{2n} fortzusetzen.

Betrachten nun die Flüsse $Q, P : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \underbrace{U_a}_{\ni a} \rightarrow M^{2n}$ der Hamiltonschen Vektorfelder X_{q_1}, X_{p_1} , dazu die Abbildung

$$\Phi : (-\varepsilon, \varepsilon)^2 \times (U_a \cap M^{2n-2}) \rightarrow M^{2n}$$

definiert durch

$$\Phi(s, t, y) := P_t \circ Q_s(y)$$

(Bewegung entlang X_{q_1} für Zeit s und entlang X_{p_1} für Zeit t). Bemerke dass wegen

$$[X_{q_1}, X_{p_1}] = -X_{\{q_1, p_1\}} = -X_1 = 0$$

nach Lemma 2.7.6 auch gilt

$$\Phi(s, t, y) = Q_s \circ P_t(y)$$

Wegen

$$d\Phi|_{(0,0,a)}(1, 0, 0) = X_{q_1} \quad , \quad d\Phi|_{(0,0,a)}(0, 1, 0) = X_{p_1}$$

$$\xi_i \in TM^{2n-2} : d\Phi|_{(0,0,\xi_i)} = \xi_i$$

$$\{\xi_i\} \xrightarrow{\text{Basis in } TM^{2n-2}} \dim \text{image } d\Phi = 2n \Rightarrow d\Phi \text{ bijektiv}$$

ist Φ (lokal) bijektiv. Mit der Hilfsabbildung

$$\Pi : \text{domain}(\Phi) \rightarrow M^{2n-2}, \quad \Pi(s, t, y) := y$$

setzen wir schließlich für einen Punkt $z \in \text{image}(\Phi)$:

$$q_i(z) := q_i [\Pi \circ \Phi^{-1}(z)]$$

$$p_i(z) := p_i [\Pi \circ \Phi^{-1}(z)] \quad , \quad i = 2, \dots, n$$

und setzen somit die Koordinaten q_i, p_i auf eine Umgebung von a in M^{2n} fort. Anschaulich gesehen: Für Punkt $z \in M^{2n}$ sucht man den (eindeutigen) Startpunkt auf M^{2n-2} , der durch die Flüsse Q, P nach z getragen wird und wählt dessen Koordinaten als die Koordinaten von z . Natürlich bleiben die q_i, p_i auf M^{2n-2} die gleichen.

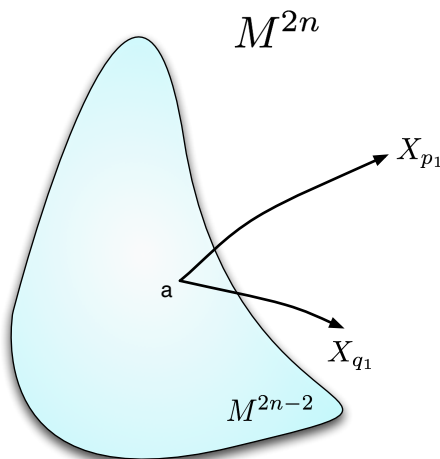


Abbildung 19: Zum Beweis des Satzes von Darboux. Beachte dass mit $n = 2$ die Abbildung eigentlich einen 4-dimensionalen Raum darstellen soll.

Behauptung: Die Koordinaten q_i, p_i sind die gesuchten Darboux-Koordinaten.

Beweis: Zeigen zunächst die lineare Unabhängigkeit der dq_i, dp_i . Aufgrund ihrer Stetigkeit genügt es ihre lineare Unabhängigkeit im Punkt a zu zeigen, diese bleibt dann in einer Umgebung von a erhalten. Da die q_i, p_i Koordinaten auf M^{2n-2} sind, sind die $d_a q_i, d_a p_i, i \geq 2$ automatisch linear unabhängig. Aus

$$\sum_{i=1}^n (\lambda_i d_a q_i + \mu_i d_a p_i) = 0$$

das heißt

$$(\lambda_1 d_a q_1 + \mu_1 d_a p_1) = - \sum_{i=2}^n (\lambda_i d_a q_i + \mu_i d_a p_i)$$

folgen zwei Möglichkeiten:

- Linke und rechte Seite sind 0. Aus der linearen Unabhängigkeit jeweils von $d_a q_i, d_a p_i, i \geq 2$ und $d_a q_1, d_a p_1$ folgt dann $\lambda_i = \mu_i = 0$.
- Linke und rechte Seite sind nicht 0. Dann existiert für die rechte Seite ein Vektor $\xi \in TM^{2n}$ (o.B.d.A $\xi \in TM^{2n-2}$ da jeglicher Anteil aus $\text{span} \{X_{q_1}, X_{p_1}\}$ für die rechte Seite keine Rolle spielt) mit

$$\sum_{i=2}^n (\lambda_i d_a q_i + \mu_i d_a p_i) \xi \neq 0$$

Doch eben genau wegen $\xi \in TM^{2n-2}$ ist per Konstruktion von M^{2n-2} :

$$(\lambda_1 d_a q_1 + \mu_1 d_a p_1) \xi = 0$$

was ein Widerspruch ist!

Somit sind die $d_a q_i, d_a p_i$ linear unabhängig und die q_i, p_i stellen in einer Umgebung $\underbrace{U_a}_{\ni a} \subset M^{2n}$ Koordinaten dar.

Zu zeigen bleiben noch die Relationen aus Gl. 43. Per Konstruktion sind die $q_i, p_i, i \geq 2$ invariant bzgl. der Flüsse X_{q_1}, X_{p_1} , das heißt es ist erfüllt:

$$\underbrace{\{p_i, p_1\}}_{X_{p_1}(p_i)} = 0 = \underbrace{\{q_i, q_1\}}_{X_{q_1}(q_i)}$$

$$\{p_i, q_1\} = 0 = \{q_i, p_1\}$$

Es bleibt noch zu zeigen:

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}, \{p_i, p_j\} = 0 = \{q_i, q_j\}, \quad i, j \geq 2$$

Für Punkte $x \in U_a \cap M^{2n-2}$ ist dies tatsächlich erfüllt, da die $\{\partial_{q_i}, \partial_{p_i}\}_{i \geq 2}$ auch nach der Fortsetzung in TM^{2n-2} liegen, also dort (in den ungeordneten Koordinaten $q_1, p_1, \dots, q_n, p_n$) die Gestalt

$$\Omega = \left[\begin{array}{cc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & -1 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & & & & 0 & 1 \\ 0 & 0 & & & & -1 & 0 \end{array} \right]$$

annimmt. Wegen $\mathcal{L}_{X_{q_1}} \omega = 0$ und $\mathcal{L}_{X_{p_1}} \omega = 0$ (vgl. Satz 3.2.5) bleibt ω entlang $P_t \circ Q_s$ erhalten, das heißt $Q_s^* \omega = \omega = P_t^* \omega$. Somit gilt

$$\omega(dQ_s(X_{p_i}), dQ_s(X)) \stackrel{Q_s^* \omega = \omega}{=} \omega(X_{p_i}, X) = X(p_i) \stackrel{\text{def. von } dQ_s}{=} dQ_s(X)(p_i \circ Q_{-s}) = dQ_s(X)(p_i)$$

$$\stackrel{\text{def. von } X_{p_i}}{\implies} dQ_s(X_{p_i}) = X_{p_i}, \quad i \geq 2$$

Analog zeigt man: Q_s, P_t erhalten $X_{p_i}, X_{q_i}, i \geq 2$. Somit erhält $P_t \circ Q_s$ die Vektorfelder $X_{q_i}, X_{p_i}, i \geq 2$ und auch ω , und somit wegen

$$\begin{aligned} \{q_i, p_j\} &\stackrel{\text{def.}}{=} \omega(X_{q_1}, X_{p_j}) = \omega_{(P_{-t} \circ Q_{-s})} (d(P_{-t} \circ Q_{-s})X_{q_i}, d(P_{-t} \circ Q_{-s})X_{p_j}) \\ &= \omega_{(P_{-t} \circ Q_{-s})} (X_{q_i}, X_{p_j}) = \omega(X_{q_i}, X_{p_j}) \circ P_{-t} \circ Q_{-s} \\ &= \{q_i, p_j\} \circ P_{-t} \circ Q_{-s}, \quad i \geq 2 \end{aligned}$$

auch die Poisson-Klammer $\{q_i, p_j\}$. Demnach ist $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$ in ganz U_a . Analoges gilt auch für $\{p_i, p_j\}$ und $\{q_i, q_j\}$. \square

3.3.3 Poincaré Lemma über symplektische Form

Es sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit. Dann ist $\omega = d\alpha$ für 1-Form $\alpha \in \Lambda^1 M$.

Beweis: Nach dem Satz von Darboux ist o.B.d.A

$$\omega = \sum_i dq_i \wedge dp_i \stackrel{(2.5.4)}{=} \sum_i d[q_i dp_i] = d \underbrace{\sum_i q_i dp_i}_{\alpha}$$

3.3.4 Korollar über Darboux-Koordinaten

Es sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit und $q \in C^\infty(M)$ mit $dq \neq 0$. Dann existieren (lokale) Darboux-Koordinaten q_i, p_i auf M so dass $q_1 = q$ ist.

Beweis: Siehe Beweis von Satz von Darboux (3.3.2).

3.3.5 Satz über funktional unabhängige, kommutierende Funktionen

Es sei (M, ω) eine $2n$ -dimensionale symplektische Mannigfaltigkeit. Es seien $q^1, \dots, q^n \in C^\infty(M)$ funktional unabhängig in $a \subset M$ (das heißt $d_a q^i$ linear unabhängig) mit

$$\{q^i, q^j\} = 0$$

Dann können die q^i in einer Umgebung von a zu Darboux-Koordinaten q^i, p^i fortgesetzt werden, das heißt

$$\omega = \sum_{i=1}^n dq^i \wedge dp^i$$

für geeignete $p^1, \dots, p^n \in C^\infty$.

Beweis: Aufgrund der Glattheit von q^i sind die dq^i auch in einer Umgebung von a linear unabhängig. Nach Korollar 3.2.3 sind die Hamiltonschen Vektorfelder X_{q^i} auch linear unabhängig. Außerdem gilt

$$[X_{q^i}, X_{q^j}] = -X_{\{q^i, q^j\}} = -X_0 = 0$$

Nach dem Satz über parallele Koordinaten (2.7.7) existieren somit Koordinaten $v^1, \dots, v^n, u^1, \dots, u^n$ so dass

$$X_{q^i} = -\partial_{u^i}, \quad i = 1, \dots, n \quad (44)$$

Wählen vorübergehend als Koordinaten den Satz $q^1, \dots, q^n, u^1, \dots, u^n$. Hierbei handelt es sich tatsächlich um Koordinaten, denn aus

$$\sum_{i=1}^n [\lambda_i dq^i + \mu_i du^i] = 0$$

folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^n [\lambda_i dq^i + \mu_i du^i] X_{q^k} = \sum_{i=1}^n \left[\lambda_i \underbrace{dq^i X_{q^k}}_{\{q^i, q^k\}=0} + \mu_i \underbrace{du^i X_{q^k}}_{-\partial_{u^k} u^i = -\delta_{ik}} \right] = -\mu_k, \quad k = 1, \dots, n \\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i dq^i = 0 \stackrel{dq^i \text{ lin. unabh.}}{\implies} \lambda_i = 0, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

In diesen Koordinaten gilt nun

$$\{q^i, u^j\} = -X_{q^j}(u^i) \stackrel{(44)}{=} \partial_{u^j}(u^i) = \delta_{ij}$$

$$\{q^i, q^j\} = 0, \quad i, j = 1, \dots, n$$

Jedoch ist $\{u_i, u_j\} = 0$ nicht gesichert. Dazu *modifizieren* wir die Koordinaten u^i und führen die neuen Koordinaten

$$p^i := u^i + f^i, \quad p^i(q, u) = u^i + f^i(q)$$

ein, wobei die $f^i \in C^\infty$ erstmal beliebig sein können. Tatsächlich ist dies auch ein Koordinatensystem, denn aus

$$\sum_{i=1}^n [\lambda_i dq^i + \mu_i dp^i] = 0$$

folgt

$$0 = \sum_{i=1}^n [\lambda_i dq^i + \mu_i dp^i] \partial_{u^k} = \sum_{i=1}^n \left[\lambda_i \underbrace{dq^i \partial_{u^k}}_0 + \mu_i \underbrace{du^i \partial_{u^k}}_{\delta_{ik}} + \mu_i \underbrace{\partial_{u^k} f^i(q)}_0 \right] = \mu_k, \quad k = 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i dq^i = 0 \stackrel{dq^i \text{ lin. unabh.}}{\implies} \lambda_i = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

Dabei erfüllen diese Koordinaten

$$\{q^i, p^j\} = \{q^i, u^j + f^j\} = \underbrace{\{q^i, u^j\}}_{\delta_{ij}} + \{q^i, f^j\} \stackrel{(40)}{=} \delta_{ij} + \sum_{k=1}^n \underbrace{\{q^i, q^k\}}_0 \frac{\partial f^j}{\partial q^k} = \delta_{ij}$$

Zu bestimmen wären nun die f^i , so dass auch gilt

$$\{p^i, p^j\} \stackrel{!}{=} 0$$

Mit

$$\begin{aligned} \{p^i, p^j\} &= \{u^i, u^j\} + \{u^i, f^j\} + \{f^i, u^j\} + \{f^i, f^j\} \\ &\stackrel{(40)}{=} \{u^i, u^j\} + \underbrace{\{u^i, q^k\}}_{-\delta_{ik}} \frac{\partial f^j}{\partial q^k} + \underbrace{\{q^l, u^j\}}_{\delta_{lj}} \frac{\partial f^i}{\partial q^l} + \underbrace{\{q^k, q^l\}}_0 \frac{\partial f^i}{\partial q^k} \frac{\partial f^j}{\partial q^l} \\ &= \underbrace{\{u^i, u^j\}}_{\lambda^{ij}} + \frac{\partial f^i}{\partial q^j} - \frac{\partial f^j}{\partial q^i} \end{aligned}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial u^k} \lambda^{ij} = -X_{q^k} \{u^i, u^j\} = \{q^k, \{u^i, u^j\}\} \stackrel{\text{Jacobi}}{=} -\left\{ \underbrace{\{u^j, q^k\}}_{-\delta_{jk}}, u^i \right\} + \left\{ \underbrace{\{q^k, u^i\}}_{\delta_{ki}}, u^j \right\} \stackrel{(3.2.12)}{=} 0$$

$$\Rightarrow \lambda^{ij} = \lambda^{ij}(q)$$

ergibt sich das zu lösende System partieller Differentialgleichungen

$$\frac{\partial f^j}{\partial q^i}(q) - \frac{\partial f^i}{\partial q^j}(q) = \lambda^{ij}(q), \quad i, j = 1, \dots, n$$

Wegen

$$d \left[\sum_{i=1}^n f^i dq^i \right] = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial q^j} dq^j \wedge dq^i = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \left[\frac{\partial f^i}{\partial q^j} dq^j \wedge dq^i - \frac{\partial f^i}{\partial q^j} dq^i \wedge dq^j \right] = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial f^j}{\partial q^i} - \frac{\partial f^i}{\partial q^j} \right) dq^i \wedge dq^j$$

ist dies äquivalent zur Differentialgleichung

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j} \lambda^{ij} dq^i \wedge dq^j \stackrel{!}{=} d \left[\sum_{i=1}^n f^i dq^i \right]$$

für geeignete $f^i \in \mathcal{C}^\infty$.

Behaupten nun:

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j} \lambda^{ij} dq^i \wedge dq^j = \omega|_{u:\text{const}}$$

Tatsächlich ist in den Koordinaten q^i, u^i nach Korollar 3.2.13:

$$\Omega^{-1} \stackrel{(3.2.13)}{=} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & -1 & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & & & -1 \\ 1 & & & \lambda^{11} & \dots & \lambda^{n1} \\ & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & \lambda^{1n} & \dots & \lambda^{nn} \end{pmatrix}$$

und dementsprechend

$$\Omega = \begin{pmatrix} \lambda^{11} & \dots & \lambda^{n1} & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \ddots & \\ \lambda^{1n} & \dots & \lambda^{nn} & & & 1 \\ -1 & & & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & -1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

das heißt

$$\Omega|_{u:\text{const}} = (\lambda^{ij}) \Leftrightarrow \omega|_{u:\text{const}} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \lambda^{ij} dq^i \wedge dq^j$$

Da $d\omega = 0$ (da symplektisch), existiert eine 1-Form $\alpha \in \Lambda^1 M$ mit

$$\omega = d\alpha$$

Wegen

$$d \left[\sum_{i=1}^n \alpha^i dq^i \right] = d(\alpha|_{u:\text{const}}) = (d\alpha)|_{u:\text{const}} = \omega|_{u:\text{const}} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \lambda^{ij} dq^i \wedge dq^j$$

ist die Aussage bewiesen ($f^i := \alpha^i$).

□

3.3.6 Satz: Maximale Anzahl kommutierender, funktional unabhängiger Funktionen

Es seien $F_1, \dots, F_k \in \mathcal{C}^\infty(M)$ skalare Felder auf der $2n$ -dimensionalen symplektischen Mannigfaltigkeit (M, ω) . Sind die F_i funktional unabhängig und kommutieren:

$$\{F_i, F_j\} = 0 \quad , \quad \forall i, j$$

so ist $k \leq n$.

Beweis: Da die dF_i linear unabhängig sind, sind auch die X_{F_i} linear unabhängig und kommutieren (vgl. Beweis von Satz 3.3.5). Nach Satz 2.7.7 existieren Koordinaten x^i so dass $X_{F_i} = \partial_{x^i}$ ist. Wegen

$$0 = \{F_i, F_j\} = \omega(X_{F_i}, X_{F_j})$$

nimmt ω in diesen Koordinaten die Form

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & ? & \dots & ? \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & ? & \dots & ? \\ ? & \dots & ? & ? & \dots & ? \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ ? & \dots & ? & ? & \dots & ? \end{pmatrix}$$

mit der $k \times k$ Untermatrix trivial. Wäre nun $k > n$ so wäre Ω ausgeartet, ein Widerspruch!

□

3.4 Der Satz von Liouville

3.4.1 Satz über die Darstellung von Untergruppen im \mathbb{R}^n

Es sei $H \subset \mathbb{R}^n$ eine Untergruppe von $(\mathbb{R}^n, +)$ so dass

$$\exists \text{ Umgebung } \underbrace{U_0}_{\ni 0} : H \cap U_0 = \{0\}$$

Dann besitzt H die Darstellung

$$H = \left\{ \sum_{i=1}^k m_i v_i : m_i \in \mathbb{Z} \right\}$$

für geeignete, linear unabhängige $v_i \in \mathbb{R}^n$, $k \leq n$. Dabei ist $k = \dim \text{aff}(H)$. Anschaulich betrachtet ist H ein so genanntes *Gitter* im \mathbb{R}^n .

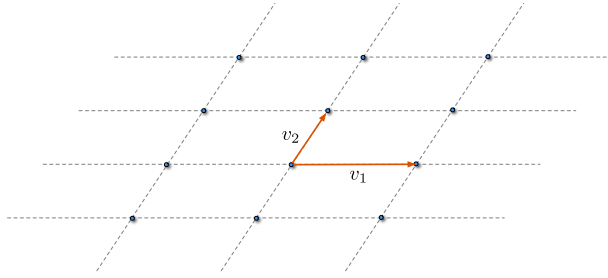


Abbildung 20: Untergruppe von \mathbb{R}^2 , dargestellt als Punkte eines Gitters.

Beweis: O.B.d.A sei $U_0 = B_\varepsilon(0)$. Ferner sei o.B.d.A $\text{aff}(H) = \mathbb{R}^n$, da andererseits der Beweis auf $\text{aff}(H) \cong \mathbb{R}^{\dim \text{aff}(H)}$ durchgeführt werden kann (bemerke $0 \in H$).

- **Behauptung:** Jede beschränkte Menge $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$, enthält nur endlich viele Punkte aus H , das heißt $\#(H \cap \mathcal{M}) < \infty$.
Beweis: Zu jedem Punkt $x \in H$ ist auch $-x \in H$ (da Gruppe). Wegen

$$H \cap B_\varepsilon(x) = \{y \in H : y \in B_\varepsilon(x)\} = \underbrace{\{x + \delta \in H : \delta \in B_\varepsilon(0)\}}_{\Rightarrow \delta \in H} = x + H \cap B_\varepsilon(0) = x + \{0\} = \{x\}$$

ist dann auch $H \cap B_\varepsilon(x) = \{x\}$. Insbesondere gilt dann

$$B_{\varepsilon/3}(x) \cap B_{\varepsilon/3}(y) = \emptyset \quad \forall x \neq y \in H$$

denn aus

$$z \in B_{\varepsilon/3}(x) \cap B_{\varepsilon/3}(y), \quad x \neq y \in H$$

folgt

$$|z - x| \leq \frac{\varepsilon}{3} \wedge |z - y| \leq \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow |x - y| \leq \frac{2\varepsilon}{3}$$

was im Widerspruch zu $y \notin B_\varepsilon(x)$ steht.

Sei nun \mathcal{M} beschränkt. \mathcal{M} kann auf \mathcal{M}' erweitert werden, so dass \mathcal{M}' auch alle $B_{\varepsilon/3}(a)$ -Kugeln der $a \in \mathcal{M}$ enthält:

$$\forall a \in \mathcal{M} : B_{\varepsilon/3}(a) \subset \mathcal{M}'$$

mit \mathcal{M}' trotzdem beschränkt. Ist nun $\#(\mathcal{M} \cap H) = \infty$, so muss nach obigen Überlegungen gelten

$$\text{Vol}(\mathcal{M}) \geq \text{Vol} \left(\bigsqcup_{a \in \mathcal{M} \cap H} B_{\varepsilon/3}(a) \right) = \sum_{a \in \mathcal{M} \cap H} \text{Vol}(B_{\varepsilon/3}(a)) = \infty$$

was ein Widerspruch zur Beschränktheit von \mathcal{M}' wäre.

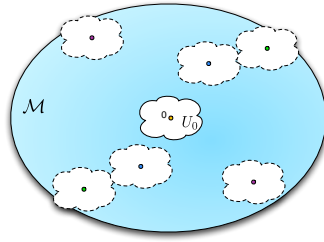


Abbildung 21: Zum Beweis des Satzes über Untergruppen des \mathbb{R}^n .

- **Behauptung:** Zu Untervektorraum $V_l = \text{span}\{v_1, \dots, v_l\}$, $l < n$ aufgespannt durch linear unabhängige $v_i \in H$, existiert ein $v_{l+1} \in H \setminus V_l$, so dass

$$d(v_{l+1}, V_l) = \inf_{\substack{v \in H \\ v \notin V_l}} d(v, V_l)$$

Beweis: O.B.d.A sei $V_l = \text{span}\{e_1, \dots, e_l\}$ (durch entsprechende Koordinatentransformation). Um das oben angegebene Infimum zu finden, reicht es aus \mathbb{R}^n o.B.d.A nur die Menge

$$\mathcal{M} := \left\{ \sum_{i=1}^l \lambda_i v_i + \sum_{i=l+1}^n \mu_i e_i : \lambda_i \in [0, 1], \mu_i \in [-R, R] \right\}$$

mit R groß genug, dass $(H \cap \mathcal{M}) \setminus V_l \neq \emptyset$ ist. Zu einen reicht diese Menge tatsächlich aus, denn:

– Für

$$z = \sum_{i=1}^l \lambda_i v_i + \sum_{i=l+1}^n \mu_i e_i \quad (45)$$

mit $\lambda_r \notin [0, 1]$ (für bestimmtes r) ist stets $(z - m \cdot v_r) \in H \quad \forall m \in \mathbb{Z}$ (da Gruppe), und m kann gewählt werden dass $\lambda_r - m_r \in [0, 1]$ ist. Dabei bleibt der Abstand

$$d(z, V_l) = \sqrt{\sum_{i=l+1}^n \mu_i^2} \quad (46)$$

stets der gleiche.

– Sobald ein $z \in (H \cap \mathcal{M}) \setminus V_l$ gefunden ist, bewirkt die Vergrößerung von R gemäß Gl. 46 nur ein Inklusion weiter entfernter Punkte.

Zum anderen existiert tatsächlich solch ein R , denn es gibt nach Voraussetzung ($\dim \text{aff}(H) = n$) ein $z \in H \setminus V_l$, das heißt insbesondere $\mu_r \neq 0$ für irgendein $r > l$ (Darstellung wie in Gl. 45). Durch geeignete *Verschiebung* parallel zu V_l :

$$z' := z - \underbrace{\sum_{i=1}^l m_i v_i}_{\in H}, \quad m_i \in \mathbb{Z}$$

kann dann auch $\lambda'_i \in [0, 1]$ gebracht werden.

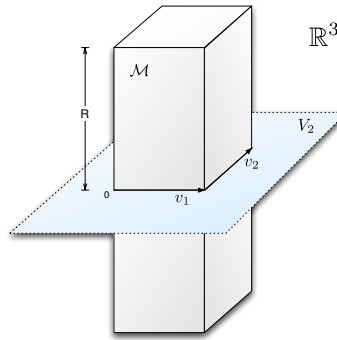


Abbildung 22: Zum Beweis des Satzes über Untergruppen des \mathbb{R}^p .

Die Menge $(H \cap \mathcal{M}) \setminus V_l$ ist nun per Konstruktion beschränkt, enthält also nur endlich viele Punkte, so dass in dieser das Infimum des Abstandes $d(v, V_l)$ tatsächlich in irgendeinem Punkt v_{l+1} angenommen wird.

- **Konstruktion der v_i :** Setzen $V_0 := \text{span}\{0\}$, dazu v_1 , und wählen v_{l+1} für $V_l := \text{span}\{v_l\} + V_{l-1}$.
- **Behauptung:** Es ist

$$H = \underbrace{\left\{ \sum_i m_i v_i : m_i \in \mathbb{Z} \right\}}_{H_G}$$

Beweis: Per Konstruktion sind alle $v_i \in H$ und linear unabhängig (also Basis), das heißt insbesondere $H_G \subset H$. Sei nun

$$z = \sum_i \lambda_i v_i \in H \setminus H_G$$

das heißt $\lambda_r \notin \mathbb{Z}$ für irgendein (größtes) r . Dann ist auch

$$z' := \sum_{i=1}^n (\lambda_i - m_i) \cdot v_i \in H$$

für beliebige $m_i \in \mathbb{Z}$, wobei diese gewählt werden können dass

$$(\lambda_r - m_r) \in (0, 1) \wedge (\lambda_i - m_i) = 0 \text{ für } i > r$$

Hätten dann also ein $z' \in H \setminus V_{r-1}$ gefunden mit $d(z', V_{r-1}) < d(v_r, V_{r-1})$, ein Widerspruch zur Konstruktion von v_r .

□

3.4.2 Definition: Operation von Gruppe auf Menge

Es sei M eine Menge und (G, \circ) eine Gruppe. Eine *Operation* von G auf M ist eine Abbildung

$$\alpha : G \times M \rightarrow M$$

mit

$$\alpha_g \circ \alpha_h = \alpha_{g \circ h}$$

so dass $\alpha_g : M \rightarrow M$ bijektiv ist. Man sagt (G, \circ, α) *operiert* auf M und schreibt auch oft

$$g(x) := \alpha_g(x)$$

Bemerke:

- Die Operation $\alpha : G \rightarrow \text{Sym}(M)$ stellt einen Gruppenhomomorphismus zwischen (G, \circ) und der symmetrischen Gruppe $(\text{Sym}(M), \circ)$ von M dar.
- Alternativ kann man die Forderung der Bijektivität weglassen, dafür fordern $\alpha_e = \text{Id}$. Daraus würde dann wiederum folgen $\alpha : G \rightarrow \text{Sym}(M)$.
- Ist G abelsch, so gilt $\alpha_h \circ \alpha_g = \alpha_g \circ \alpha_h$.
- Es ist $\alpha_h^{-1} = \alpha_{h^{-1}}$.

3.4.3 Definition: Transitive Operation

Eine Gruppe (G, \circ, α) operiert *transitiv* auf M , falls

$$\alpha_{(G)}(x) = M \quad \forall x \in M$$

das heißt

$$\forall x, y \in M : \exists g \in G : \alpha_g(x) = y$$

Bemerke: Es reicht dass $\alpha_{(G)}(x_0) = M$ für einen bestimmten Punkt $x_0 \in M$ ist, denn für jeden anderen Punkt $x \in M$ würde folgen

$$\exists \delta \in G : \alpha_\delta(x_0) = x \Rightarrow \alpha_{(G)}(x) = \alpha_{(G-\delta)}(x) = \alpha_{(G)} \circ \underbrace{\alpha_{-\delta}}_{x_0}(x) = M$$

3.4.4 Definition: Stabilisator

Die Gruppe (G, \circ, α) operiere auf die Menge M . Der *Stabilisator* (Engl. stabilizer) $\text{St}(x)$ eines Punktes $x \in M$ ist definiert durch

$$\text{St}(x) := \{g \in G : \alpha_g(x) = x\}$$

Bemerkung: Der Stabilisator $\text{St}(x)$ ist eine Untergruppe von G .

3.4.5 Definition: Lokal freie Operation

Es sei (G, \circ) eine Gruppe und zugleich ein topologischer Raum. Man sagt: (G, \circ, α) operiert auf der Menge M *lokal frei*, falls

$$\forall x \in M : \exists \text{Umgebung } \underbrace{U_e}_{\ni e} : \forall g \in U_e \setminus \{e\} : \alpha_g(x) \neq x$$

das heißt

$$\text{St}(x) \cap U_e = \{e\}$$

Beispiele:

- Für Vektorfeld X auf Mannigfaltigkeit M ist

$$\alpha_t(a) := \varphi_t^X(a)$$

eine Operation von $G := (\mathbb{R}, +)$ auf M .

- Betrachten den Torus

$$T^2 := \mathbb{R}^2 / \sim, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^2$$

und die Gruppe $G = (\mathbb{R}^2, +)$. Dann ist

$$\alpha_{(t_1, t_2)} \left(\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right] \right) := \left[\begin{pmatrix} x + t_1 \\ y + t_2 \end{pmatrix} \right]$$

eine Operation von G auf T^2 . Der Stabilisator $\text{St}(x)$ ist gegeben durch

$$\text{St}(x) = \mathbb{Z}^2$$

Bemerke dass er hier unabhängig von x ist. \mathbb{R}^2 operiert dabei lokal frei.

3.4.6 Lemma über den Stabilisator kommutativer Gruppen

Die Gruppe (G, \circ, α) operiere transitiv auf die Menge M . Ist G kommutativ (abelsch), so gilt

$$\text{St}(x) = \text{St}(y) \quad \forall x, y$$

In diesem Kontext schreibt man dann einfach St für den Stabilisator. In dem Fall ist St der Kern von $\alpha : G \rightarrow \text{Sym}(M)$ und es gilt für beliebiges $x \in M$:

$$\alpha_h(x) = x \Leftrightarrow h \in \text{St} \Leftrightarrow \alpha_h = \text{Id}$$

Dies impliziert sogar:

$$\alpha_h(x) = \alpha_g(x) \Leftrightarrow \alpha_h = \alpha_g$$

Beweis: Es seien $x, y \in M$ beliebig, dazu $h \in G$ mit $\alpha_h(x) = y$ (da G transitiv). Dann gilt

$$\text{St}(y) = \{g \in G : \alpha_g(y) = y\} = \{g \in G : \underbrace{\alpha_g \circ \alpha_h}_{\alpha_{gh}}(x) = \alpha_h(x)\}$$

$$\stackrel{G \text{ abelsch}}{=} \{g \in G : \alpha_{hg}(x) = \alpha_h(x)\} = \{g \in G : \alpha_h \circ \alpha_g(x) = \alpha_h(x)\}$$

$$\stackrel{\alpha_h \in \text{Sym}(M)}{=} \{g \in G : \alpha_g(x) = x\} = \text{St}(x)$$

□

3.4.7 Kanonische Identifizierung von G mit M

Die abelsche Gruppe (G, \circ, α) operiere transitiv auf M und $a_0 \in M$ sei fest gewählt. Dann kann man M kanonisch mit der Faktorgruppe G/St identifizieren¹⁰.

Erläuterung: Jedem $x \in M$, ordnen wir die Nebenklasse $g \circ \text{St}$ zu, mit $g(a_0) = x$. Diese Zuordnung erfüllt:

- Sie ist wohldefiniert, denn zum einen existiert für jedes $x \in M$ ein $g \in G$ mit $g(a_0) = x$ (G transitiv) und zum anderen gilt für $h(a_0) = x$

$$g \circ \overbrace{h^{-1}x}^{a_0} = x \Rightarrow g \circ h^{-1} \in \text{St} \Rightarrow g \circ \text{St} = h \circ \text{St}$$

- Sie ist injektiv, denn für $x \neq y \in M$ (dazu $x \mapsto g \text{St}$ und $y \mapsto h \text{St}$) ist

$$g \circ \overbrace{h^{-1}y}^{a_0} = x \Rightarrow g \circ h^{-1} \notin \text{St} \Rightarrow g \text{St} \neq h \text{St}$$

- Sie ist surjektiv, denn für $g \text{St} \in G/\text{St}$ wählen einfach $x := g(a_0)$.

Bemerkung: Die Faktorgruppe G/St kann auch als Menge aller Äquivalenzklassen $[g]$ über G angesehen werden, mit der durch St induzierten Äquivalenzrelation

$$g \sim h \Leftrightarrow g \circ \text{St} = h \circ \text{St} \Leftrightarrow \alpha_g = \alpha_h$$

Somit wird jedem Punkt $x \in M$ die Äquivalenzklasse $[g]$ zugeordnet, für die gilt $g(a_0) = x$.

¹⁰Die Faktorgruppe G/U bzgl. der Untergruppe U ist definiert durch $G/U := \{g \circ U : g \in G\}$ mit der Operation $(g \circ U) \circ (h \circ U) := (gh) \circ U$.

3.4.8 Lemma über Fluss-Operationen auf Mannigfaltigkeiten

Es sei M eine n -dimensionale, wegzusammenhängende Mannigfaltigkeit und X_1, \dots, X_n paarweise kommutierende, linear unabhängige Vektorfelder (also X_{1_a}, \dots, X_{n_a} linear unabhängig an jedem Punkt $a \in M$). Seien ferner die Flüsse

$$\varphi^{X_i}$$

vollständig. Dann ist die Abbildung

$$\Phi : \mathbb{R}^n \times M \rightarrow M$$

definiert durch

$$\Phi_{(t^1, \dots, t^n)}(a) := \varphi_{t^1}^{X_1} \circ \dots \circ \varphi_{t^n}^{X_n}(a)$$

eine **transitive, lokal freie Operation** von $(\mathbb{R}^n, +)$ auf M .

Beweis:

- **Verkettungsregel:** Wegen $[X_i, X_j] = 0$ gilt

$$\Phi_t \circ \Phi_s = \varphi_{t^1}^{X_1} \circ \dots \circ \varphi_{t^n}^{X_n} \circ \varphi_{s^1}^{X_1} \circ \dots \circ \varphi_{s^n}^{X_n}$$

$$\stackrel{\text{sukzessives}}{\text{Vertauschen}} \varphi_{t^1}^{X_1} \circ \varphi_{s^1}^{X_1} \circ \dots \circ \varphi_{t^n}^{X_n} \circ \varphi_{s^n}^{X_n}$$

$$= \varphi_{t^1+s^1}^{X_1} \circ \dots \circ \varphi_{t^n+s^n}^{X_n}$$

$$= \Phi_{t+s}$$

- **Injektivität:** Sei $t \in \mathbb{R}^n$ beliebig und $a, b \in M$ so dass $\varphi_t(a) = \varphi_t(b)$ ist. Dann gilt

$$b = \Phi_0(b) = \Phi_{-t}\Phi_t(a) = \Phi_0(a) = a$$

(Eigentlich klar wegen Eindeutigkeit des Flusses).

- **Surjektivität:** Sei $t \in \mathbb{R}^n$ gegeben und $x \in M$ beliebig. Dann ist $a := \underbrace{\Phi_{-t}(x)}_{\in M}$ genau so dass gilt

$$\Phi_t(a) = x$$

Somit ist Φ tatsächlich eine Operation auf M .

- **Transitivität:** Sei $a \in M$ beliebig. Dann gilt

$$\left(\frac{\partial \Phi(a)}{\partial (t^1, \dots, t^n)} \right) \Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{pmatrix} - & X_1 & - \\ & \vdots & \\ - & X_n & - \end{pmatrix}}_{\text{nicht ausgeartet}}$$

das heißt es existiert ein Kugel $B_\varepsilon(a)$ so dass

$$\forall x \in B_\varepsilon(a) : \exists t \in \mathbb{R}^n : \Phi_t(a) = x$$

Betrachten nun das Bild $B := \Phi_{\mathbb{R}^n}(a)$ und beliebigen Punkt $b \in B$, $b = \Phi_t(a)$. Dann existiert eine Kugel $B_\varepsilon(b)$ mit

$$\forall x \in B_\varepsilon(b) : \exists s \in \mathbb{R}^n : x = \Phi_s(b) = \Phi_s \circ \Phi_t(a) = \Phi_{s+t}(a) \Rightarrow x \in B$$

also

$$B_\varepsilon(b) \subset B$$

das heißt B ist **offen**. Andererseits sei $(c_k) \subset B$ eine in M konvergente Folge $c_k \rightarrow c \in M$. Dann existiert analog zu vorhin eine Kugel $B_\varepsilon(c)$ mit $B_\varepsilon(c) \subset \Phi_{\mathbb{R}^n}(c)$. Doch per Konstruktion von c schneidet $B_\varepsilon(c)$ das Bild B , das heißt

$$\exists d \in B_\varepsilon(c) \cap B \Rightarrow d = \Phi_t(a) = \Phi_s(c)$$

für irgendwelche $t, s \in \mathbb{R}^n$, also

$$c = \Phi_{-s} \circ \Phi_t(a) = \Phi_{t-s}(a) \in B$$

Demnach ist B auch **abgeschlossen**.

Sei nun $x \in M$ beliebig, dazu Kurve

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow M, \gamma(0) = a, \gamma(1) = x$$

(existiert da M wegzusammenhängend). Zu zeigen wäre $\gamma \subset B$. Sei

$$t_{\max} := \sup \{t \in [0, 1] : \gamma(t) \in B\}$$

Da B abgeschlossen und γ stetig ist, muss $\gamma(t_{\max}) \in B$ liegen. Doch da B offen ist, gibt es eine Kugel $B_\varepsilon(\gamma(t_{\max})) \subset B$. Wäre $t_{\max} < 1$, so gäbe es ein $s \in (t_{\max}, 1]$ mit $\gamma(s) \in B_\varepsilon(\gamma(t_{\max})) \subset B$ (da γ stetig), ein Widerspruch zur Konstruktion von t_{\max} .

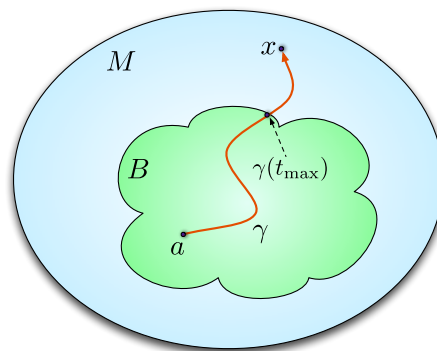


Abbildung 23: Zur Transitivität der Operation Φ von \mathbb{R}^n auf M .

- **Lokale Freiheit:** Es sei $a \in M$ beliebig. Da die X_i kommutieren, existiert ein Koordinatensystem x^i auf M mit $\partial_{x^i} = X_i$ und $a \cong (0, \dots, 0)$. In diesen Koordinaten ist dann für eine genügend kleine Umgebung $B_\varepsilon(0) \subset \mathbb{R}^n$:

$$\Phi_t(a) \cong (t_1, \dots, t_n) \neq (0, \dots, 0) \quad \forall t \in B_\varepsilon(0)$$

(da Koordinaten bijektiv).

□

3.4.9 Definition: Integrables System

Sei (M, ω) eine $2n$ -dimensionale, symplektische Mannigfaltigkeit mit den Feldern $H, F_1, \dots, F_n \in \mathcal{C}^\infty(M)$, für die gilt

$$\{F_i, F_j\} = 0, \quad \{F_i, H\} = 0, \quad i, j = 1, \dots, n$$

Ferner seien die dF_i fast überall linear unabhängig. Dann heißt

$$(M, \omega, H, F_1, \dots, F_n)$$

ein $(2n$ -dimensionales) *integrables System*.

Bemerkungen:

- Oft fordert man zusätzlich, dass die Flüsse $\varphi^{X_{F_i}}$ von X_{F_i} vollständig sind, das heißt $\varphi_t^{X_{F_i}} : M \rightarrow M$ ist für alle t definiert.
- In der Physik ist die Menge $\{H : \text{const}\}$ mit der Hamilton Funktion H kompakt, das heißt X_H ist vollständig.

3.4.10 Definition: Blatt

Es sei $(M, \omega, H, F_1, \dots, F_n)$ ein integrables System. Dann ist ein *Blatt* in M eine wegzusammenhängende¹¹ Menge darstellbar durch

$$L_{(c_1, \dots, c_n)} := \{a \in M : F_i(a) = c_i : \text{const}, i = 1, \dots, n \wedge a \text{ erreichbar aus } a_0\}$$

für ein geeignetes $a_0 \in M$.

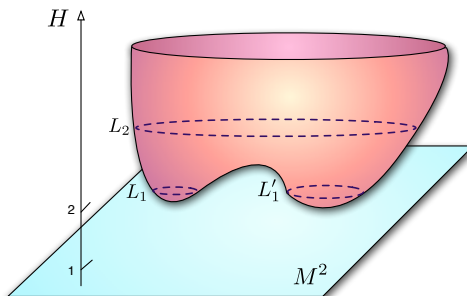


Abbildung 24: Zur Definition von Blättern. Abgebildet ist ein 2-dimensionales integrables System (M^2, ω, H) mit dem Graphen von H .

3.4.11 Definition: Ausgeartete Menge

Es sei M eine Mannigfaltigkeit und $F_1, \dots, F_k \in C^\infty(M)$. Dann heißt ein Punkt $a \in M$ *ausgeartet* bzgl. der F_i falls die $d_a F_i$ linear abhängig sind. Eine Menge $U \subset M$ heißt bzgl. der F_i *ausgeartet*, falls sie bzgl. der F_i ausgeartete Punkte enthält.

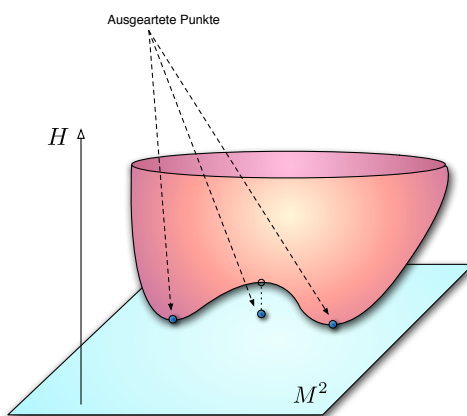


Abbildung 25: Zur Definition von ausgearteten Punkten. Abgebildet ist ein 2-dimensionales integrables System (M^2, ω, H) mit dem Graphen von H .

3.4.12 Satz von Liouville

Es sei $(M, \omega, H, F_1, \dots, F_n)$ ein $2n$ -dimensionales integrables System mit den vollständigen Flüssen $\varphi^{X_{F_i}}$. Dann gilt:

1. Jedes bzgl. der F_i nicht-ausgeartete Blatt L_c ist diffeomorph zu einem Zylinder:

$$\underbrace{S_1 \times \dots \times S_1}_k \times \mathbb{R}^{n-k}$$

¹¹Eine Menge $L \subset M$ heißt *Wegzusammenhängend*, falls es für jedes Paar von Punkten $x, y \in L$ einen Weg γ in L von x nach y gibt.

2. X_H ist Tangential zu L_c und es existieren standard-Koordinaten ρ^1, \dots, ρ^n auf L_c (also ρ^1, \dots, ρ^k zyklisch) nach

$$\underbrace{S_1 \times \dots \times S_1}_{T^k} \times \mathbb{R}^{n-k}$$

so dass in diesen Koordinaten gilt:

$$X_H = \begin{pmatrix} \varkappa_1 \\ \vdots \\ \varkappa_n \end{pmatrix}, \quad \varkappa_i : \text{const}$$

das heißt

$$\varphi_t^{X_H}|_{L_c}(\rho_0^1, \dots, \rho_0^n) = (\rho_0^1, \dots, \rho_0^n) + t \cdot (\varkappa_1, \dots, \varkappa_n)$$

3. Sind für irgendein $k \in \{1, \dots, n\}$ die Mengen $\{F_k : \text{const}\}$ kompakt, so ist L_c sogar diffeomorph zum Torus

$$\underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_{T^n}$$

und man kann in einer Umgebung¹² $U_{L_c} \cong T^n \times \underbrace{D}_{\subset \mathbb{R}^n}$ von L_c Koordinaten $\varphi^1, \dots, \varphi^n, s^1, \dots, s^n$ finden, so dass s^1, \dots, s^n auf L_c konstant sind, φ^i genau die zyklischen Koordinaten $\varphi : U_{L_c} \rightarrow T^n$ sind, und gilt:

$$\omega = d\varphi \wedge ds, \quad X_H = \begin{pmatrix} \varkappa_1(s) \\ \vdots \\ \varkappa_n(s) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F_i = F_i(s) \quad (47)$$

Die Koordinaten φ^i nennt man *Winkelvariablen*, die Koordinaten s^i *Wirkungsvariablen*. Zusammen bilden sie ein System kanonischer *Wirkungswinkelkoordinaten*.

4. Ist $\alpha \in \Lambda^1 M$ mit $d\alpha = \omega$ gegeben, so kann man diese Koordinaten $s^1, \dots, s^n, \varphi^1, \dots, \varphi^n$ bilden durch Differentiation und Integration.

Beweis

Es seien hier $S_1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

1. • **Behauptung:** Die X_{F_i} und X_H sind tangential zu L_c , das heißt $\varphi_t^{X_{F_i}/H}(z) \in L_c, z \in L_c$.

Beweis: Wegen

$$\frac{d}{dt} F_i \left[\varphi_t^{X_{F_j}}(x) \right] = dF_i(X_{F_j}) = \{F_i, F_j\} = 0$$

ist

$$x \in L_c \Rightarrow F_i(x) = c_i \quad \forall i \Leftrightarrow F_i \left(\varphi_t^{X_{F_j}}(x) \right) = c_i \quad \forall i \Rightarrow \varphi_t^{X_{F_j}}(x) \in L_c$$

Analog auch für X_H .

• Definieren die Abbildung

$$\Phi : \mathbb{R}^n \times L_c \rightarrow L_c$$

gemäß

$$\Phi(t_1, \dots, t_n)(x) := \varphi_{t_1}^{X_{F_1}} \circ \dots \circ \varphi_{t_n}^{X_{F_n}}(x)$$

Dann ist tatsächlich $\Phi_t : L_c \rightarrow L_c$ (da L_c invariant gegenüber Φ). Wegen $[X_{F_i}, X_{F_j}] = 0$ und der linearen Unabhängigkeit der X_{F_i} (vgl. Korollar 3.2.3) ist Φ nach Lemma 3.4.8 eine transitive, lokal freie Operation von $(\mathbb{R}^n, +)$ auf L_c .

¹²Das heißt eine L_c enthaltende offene Menge.

- **Behauptung:** Der Stabilisator St von $(\mathbb{R}^n, +, \Phi)$ nimmt die Form

$$\text{St} = \left\{ \sum_{i=1}^k m_i v_i : m_i \in \mathbb{Z} \right\}$$

an, für geeignete, linear unabhängige $v_i \in \text{St}$ und $k \leq n$.

Beweis: Da $(\mathbb{R}^n, +, \Phi)$ lokal frei operiert, das heißt $\text{St} \cap U_0 = \{0\}$ für geeignete Umgebung $U_0 \ni 0$, folgt nach Satz 3.4.1 die Behauptung.

- Nach Abschnitt 3.4.7 ist nun L_c identifizierbar mit \mathbb{R}^n / St , wobei wir o.B.d.A Koordinaten ρ^i wählen können so dass $\partial_{\rho^i} \cong v_i$, $i = 1, \dots, k$. Somit ist \mathbb{R}^n / St identifizierbar mit $\underbrace{S_1 \times \dots \times S_1}_{k \text{ mal}} \times \mathbb{R}^{n-k}$:

$$\left[\sum_{i=1}^n \lambda_i x^i \right] \mapsto \begin{pmatrix} [\lambda_1] \\ \vdots \\ [\lambda_k] \\ \lambda_{k+1} \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

das heißt $L_c \cong \mathbb{R}^n / \text{St} \cong T^k \times \mathbb{R}^{n-k}$.

2. • **Behauptung:** In den Koordinaten $(\rho^1, \dots, \rho^n) \cong T^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ ist $X_H = (\varkappa_1, \dots, \varkappa_n)$ mit $\varkappa_i : \text{const}$.
Beweis: Da die X_{F_i} linear unabhängig sind und kommutieren, können wir sie o.B.d.A als Koordinatenvektorfelder $\partial_{x^i} := X_{F_i}$ auf L_c auffassen, für die gilt

$$[\partial_{x^i}, \partial_{\rho^j}] = [X_{F_i}, \partial_{\rho^j}] = \partial_{\rho^j}(F_i) = \frac{\partial F_i}{\partial \rho^j} \Big|_{L_c} \stackrel{F_i : \text{const}}{=} 0$$

Nach Lemma 2.6.14 über Vektorkomponenten hängen die Komponenten der ∂_{ρ^j} nicht von den Koordinaten x^i ab, das heißt es gilt

$$\partial_{\rho^i} = \sum_j \rho_i^j \partial_{x^j}$$

für konstante ρ_i^j . In diesen Koordinaten ist dann wiederum

$$[X_H, \partial_{\rho^i}] = \sum_j \rho_i^j \underbrace{[X_H, \partial_{x^j}]}_{[X_H, X_{F_j}] = 0} = 0$$

so dass analog die entsprechenden Koordinaten von X_H nicht von den ρ^i abhängen, das heißt

$$X_H \cong \begin{pmatrix} \varkappa_1 \\ \vdots \\ \varkappa_n \end{pmatrix}, \quad \varkappa_i : \text{const}$$

3. Es seien für irgendein $k \in \{1, \dots, n\}$ alle Mengen $\{F_k : \text{const}\}$ kompakt und L_c bzgl. der F_i nicht ausgeartet.

- Da die dF_i auf L_c linear unabhängig sind, sind sie dies auch in einer Umgebung von L_c .
- Wegen $L_b \subset \{F_k : \text{const}\}$ ist L_b (als abgeschlossene Menge) für jedes b ebenfalls kompakt. Doch da L_b außerdem diffeomorph zu $T^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ ist, muss $k = 0$ sein, das heißt es ist tatsächlich $L_b \cong T^n$.
- Betrachten eine zu L_c transversale, beschränkte Untermannigfaltigkeit M^n , dazu die Operation

$$\Phi : \mathbb{R}^n \times M \rightarrow M, \quad \Phi_{(t_1, \dots, t_n)}(a) := \varphi_{t_1}^{X_{F_1}} \circ \dots \circ \varphi_{t_n}^{X_{F_n}}(a)$$

von \mathbb{R}^n auf M . Dann ist

$$\underbrace{\Phi(\mathbb{R}^n, y)}_{L_{F(y)} \ni y} \cong T^n$$

bzw.

$$\underbrace{U_{L_c}}_{\supset L_c} := \Phi(\mathbb{R}^n, M^n) \cong T^n \times D^n$$

mit den standard-Koordinaten

$$(\rho^1, \dots, \rho^n) : U_{L_c} \rightarrow T^n, \quad (F_1, \dots, F_n) : U_{L_c} \rightarrow D^n$$

Es ist tatsächlich $U_{L_c} = T^n \times D^n$, da man jedem $x = \Phi_t(y) \in U_{L_c}$, $y \in D^n$ eindeutig ein Blatt $\underbrace{L_{\mathbf{F}(x)}}_{\cong T^n}$ zuschreiben kann; auf diesem sind dann die Koordinaten ρ^i festgelegt. Andererseits sind die F_i auf ganz $L_{\mathbf{F}(x)}$ konstant und stellen auf D^n Koordinaten dar, das heißt y (und somit das Blatt $L_{\mathbf{F}(x)} = L_{\mathbf{F}(y)}$) ist eindeutig durch die Werte F_i festgelegt. Es sei nun D^n o.B.d.A eine Kugel in \mathbb{R}^n .

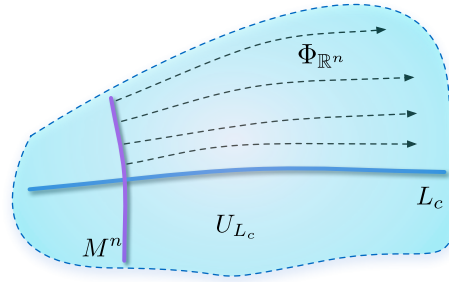


Abbildung 26: Zur Konstruktion von U_{L_c}

Somit nimmt ω in U_{L_c} die allgemeine Form

$$\omega = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} d\rho^i \wedge d\rho^j + \sum_{i,j=1}^n b_{ij} dF^i \wedge dF^j + \sum_{i,j=1}^n c_{ij} d\rho^i \wedge dF^j$$

an.

- **Behauptung:** Auf jedem Blatt L_b verschwindet ω , das heißt

$$\omega|_{TL_b} = 0$$

Beweis: Mit $\partial_{x^i} = X_{F_i}$ (vgl. Teil 2) ist in diesen Koordinaten

$$\left(\Omega|_{TL_b} \right)_{ij} = \omega|_{L_b}(\partial_{x^i}, \partial_{x^j}) = \omega(X_{F_i}, X_{F_j}) = \{X_{F_i}, X_{F_j}\} = 0$$

- **Behauptung:** $a_{ij} = 0 \forall i, j$.

Beweis: Per Konstruktion sind $\partial_{\rho^i}|_x \in T_x L_{\mathbf{F}(x)}$ das heißt

$$a_{ij} = \frac{1}{2} \omega(\partial_{\rho^i}, \partial_{\rho^j}) = \frac{1}{2} \omega|_{L_{\mathbf{F}(x)}}(\partial_{\rho^i}, \partial_{\rho^j}) = 0$$

- **Behauptung:** $c_{ij} = c_{ij}(F_1, \dots, F_n)$.

Beweis: Tatsächlich ist

$$c_{ik} = \frac{1}{2} \omega(\partial_{\rho^i}, \partial_{F_k}) = \sum_j \rho_i^j \omega(\partial_{x^j}, \partial_{F_k}) = \sum_j \rho_i^j \omega(X_{F_j}, \partial_{F_k}) = \sum_j \rho_i^j \underbrace{\partial_{F_k} F_j}_{\delta_{kj}} = \rho_i^k$$

Doch nach Teil 2 waren die Koeffizienten ρ_i^j für jedes Blatt $L_{\mathbf{F}(x)}$ konstant, das heißt höchstens abhängig von den F_i .

- **Behauptung:** $b_{ij} = b_{ij}(F_1, \dots, F_n)$.

Beweis: Es ist einerseits

$$\begin{aligned}
0 = d\omega &= \frac{\partial b_{ij}}{\partial \rho^k} d\rho^k \wedge dF^i \wedge dF^j + \frac{\partial b_{ij}}{\partial F^k} dF^k \wedge dF^i \wedge dF^j + \underbrace{\frac{\partial c_{ij}}{\partial \rho^k} d\rho^k \wedge d\rho^i \wedge dF^j}_{0} + \frac{\partial c_{ij}}{\partial F^k} dF^k \wedge d\rho^i \wedge dF^j \\
&= \left[\frac{\partial b_{ij}}{\partial \rho^k} - \frac{\partial c_{kj}}{\partial F^i} \right] d\rho^k \wedge dF^i \wedge dF^j = \left[\frac{\partial b_{ij}}{\partial \rho^k} - \frac{\partial c_{kj}}{\partial F^i} \right] d\rho^k \wedge [dF^i \otimes dF^j - dF^j \otimes dF^i] \\
&= \left[2 \frac{\partial b_{ij}}{\partial \rho^k} - \frac{\partial c_{kj}}{\partial F^i} + \frac{\partial c_{ki}}{\partial F^j} \right] d\rho^k \wedge [dF^i \otimes dF^j] \\
&\Rightarrow 2 \frac{\partial b_{ij}}{\partial \rho^k} = \frac{\partial c_{kj}}{\partial F^i}(\mathbf{F}) - \frac{\partial c_{ki}}{\partial F^j}(\mathbf{F}) \Rightarrow b_{ij} = b_{ij}(\mathbf{F}, \rho = 0) + \rho^k \frac{\partial b_{ij}}{\partial \rho^k}(\mathbf{F})
\end{aligned}$$

Doch andererseits muss wegen $\rho^k : L_b \rightarrow S_1$ gelten

$$b_{ij}(\rho^k = 0) = b_{ij}(\rho^k = 1)$$

(Periodizität entlang zyklischer Koordinaten), das heißt

$$\frac{\partial b_{ij}}{\partial \rho^k} = 0$$

- **Folgerung:** Somit nimmt ω die Form

$$\omega = \sum_i d\rho^i \wedge \omega^i + \beta$$

an, mit

$$\omega^i = \underbrace{c_{ij} dF^j}_{=\omega^i|_{D^n}}, \quad \beta = \underbrace{b_{ij} dF^i \wedge dF^j}_{=\beta|_{D^n} \in \Lambda^2 D^n}$$

Wegen

$$\beta = \beta|_{D^n} = \omega|_{D^n}$$

ist dann auch

$$d\beta = d(\omega|_{D^n}) = d\omega|_{D^n} = 0$$

Wegen

$$0 = d\omega \stackrel{dd\rho^i=0}{=} \sum_i \underbrace{d\rho^i}_{\neq 0} \wedge d\omega^i + \underbrace{d\beta}_0$$

folgt dann auch

$$d\omega^i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Demnach existieren skalare Felder $s^i \in C^\infty(D^n)$ so dass $ds^i = \omega^i$ (da $D^n \cong B_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$) und 1-Form $\zeta \in \Lambda^1 D^n$ so dass $\beta = d\zeta$, das heißt

$$\omega = \sum_{i=1}^n d\rho^i \wedge ds^i + d\zeta = d \left[\sum_i \rho^i \wedge ds^i + \zeta \right]$$

- **Behauptung:** Die $\rho^1, \dots, \rho^n, s^1, \dots, s^n$ stellen Koordinaten in U_{L_c} dar. Dabei seien die s^i durch die Operation Φ automatisch auf ganz U_{L_c} definiert.

Beweis: In den Koordinaten $(\rho_1, \dots, \rho_n, F_1, \dots, F_n)$ ist

$$\Omega = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \frac{\partial s^i}{\partial F_j} \\ \hline -\frac{\partial s^i}{\partial F^j} & b_{ij} \end{array} \right)$$

also

$$\det \left(\frac{\partial s^i}{\partial F_j} \right) \neq 0$$

das heißt die s^i sind funktional unabhängig, stellen also, zumindest in einer Umgebung von $D^n \cap L_c$, Koordinaten dar. O.B.d.A sei so auf ganz D^n (ansonsten D^n kleiner wählen). Analog zu vorhin, sind so auch die s^i, ρ^i Koordinaten auf U_{L_c} .

- **Verbesserung der Koordinaten:** Da im Prinzip $\zeta \in \Lambda^1 D^n$ ist, besitzt sie die Darstellung

$$\zeta = \sum_i g_i ds^i, \quad g_i = g_i(s^1, \dots, s^n)$$

Setzen nun

$$\varphi^i := \rho^i + g_i$$

Dann ist stets

$$\partial_{\varphi^i} \equiv \partial_{\rho^i}$$

Die neuen Koordinaten φ^i sind sogar tatsächlich zyklisch, da bei konstantem \mathbf{s} (also festem L_b) die Koordinate φ^i nur *verschoben* entlang ρ^i läuft.

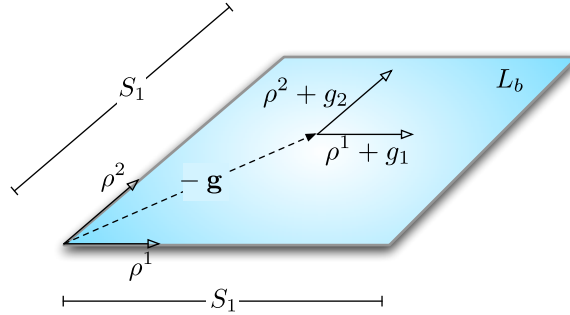


Abbildung 27: Zur Verschiebung der Koordinaten ρ^i auf den Blättern L_b .

- **Behauptung:** Die Koordinaten $\varphi^1, \dots, \varphi^n, s^1, \dots, s^n$ sind Darboux-Koordinaten.

Beweis: Tatsächlich ist

$$\sum_i d\varphi^i \wedge ds^i = \sum_i d(\rho^i + g_i) \wedge ds^i = \sum_i d\rho^i \wedge ds^i + \sum_i dg^i \wedge ds^i = \sum_i d\rho^i \wedge ds^i + d \underbrace{\sum_i g_i ds^i}_{\zeta} = \omega$$

Ferner folgt hieraus

$$\omega = d \underbrace{\sum_i -s^i \wedge d\varphi^i}_{\alpha}$$

- **Behauptung:** Die s^i sind auf L_b konstant und es gilt $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{s})$.

Beweis: Per Konstruktion waren die s^i Koordinaten auf D^n , durch die Operation Φ erweitert auf U_{L_c} . Für Punkt $x \in U_{L_c}$ mit $x = \Phi_t(y)$, $y \in D^n$ ist dann auch $y \in L_{\mathbf{F}(x)}$ und somit $\mathbf{F}(x) = \mathbf{F}(y) \stackrel{y \in D^n}{=} \mathbf{F}(s^1, \dots, s^n)$. Per Konstruktion ist auch \mathbf{s} auf jedem Blatt L_b konstant.

- **Behauptung:** In den Koordinaten φ^i, s^i nimmt X_H die Gestalt

$$X_H = \begin{pmatrix} \varkappa_1(s) \\ \vdots \\ \varkappa_n(s) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

an.

Beweis: Aus Teil 1 ist bekannt dass $X_{H_a} \in T_a L_{\mathbf{F}(a)}$ liegt, also gemäß

$$X_H = \sum_{i=1}^n X_H^i \underbrace{\partial_{\varphi^i}}_{\partial_{\rho^i}} + \sum_{i=1}^n \underbrace{0}_{X_H^{n+i}} \cdot \partial_{s^i} \stackrel{\text{Teil 2}}{=} \sum_{i=1}^n \varkappa_i \partial_{\rho^i} \Rightarrow X_H^i = \varkappa_i, i = 1, \dots, n$$

darstellbar ist, wobei nun

$$\varkappa = \varkappa(\mathbf{F}) \stackrel{\mathbf{F}=\mathbf{F}(\mathbf{s})}{=} \varkappa(\mathbf{s})$$

ist.

4. Es sei $\alpha \in \Lambda^1 M$ so dass $d\alpha = \omega$. Es gelten die Koordinaten $(\rho^1, \dots, \rho^n, F_1, \dots, F_n)$.

- Führen nun die Funktionen $\sigma^1, \dots, \sigma^n : U_{L_c} \rightarrow \mathbb{R}$ ein, definiert wie folgt: Zu Punkt

$$\underbrace{x}_{(x_T, x_D)} \in \underbrace{U_{L_c}}_{T^n \times D^n}$$

sei $L_{F(x)}$ das von x ausgehende Blatt (vgl. Teil 3). Wählen in $L_{F(x)}$ einen *Kreis*

$$K_i : S_1 \rightarrow L_{F(x)} \cong T^n$$

in der i -ten Koordinate (das heißt nur ρ^i wird einmal zyklisch durchlaufen und in der Kurve $K_i \times x_D$ werden die $\underbrace{\{F^j\}}_{\cong x_D}$ konstant gehalten) und setzen

$$\sigma^i(x) := \int_{K_i \times x_D} \alpha$$

Behauptung: Der Wert $\sigma^i(x)$ ist unabhängig vom speziell gewählten Kreis K_i .

Beweis: Es sei nun $x = (x_T, x_D) \in U_{L_c}$ und K_i, K'_i zwei Kreise der i -ten Koordinate. Betrachten die Zusammenziehung

$$K_i^t := [0, 1] \times S_1 \rightarrow L_{F(x)} \cong T^n, K_i^0 = K_i, K_i^1 = K'_i$$

Da die X_{F_i} auf $\underbrace{L_{F(x)}}_{n\text{-dim}}$ linear unabhängig sind und kommutieren, können sie o.B.d.A als Koordinatenvektoren angesehen werden. Doch wegen $\omega(X_{F_i}, X_{F_j}) = 0$ ist allgemein $\omega|_{TL_{F(x)}} = 0$. Nach dem Satz von Stokes folgt

$$\int_{K_i \times x_D} \alpha - \int_{K'_i \times x_D} \alpha = \int_{K_i \times x_D} \alpha + \int_{(-K'_i)' \times x_D} \alpha = \int_{([0,1] \times S_1, K_i^t, \varepsilon)} \omega = 0$$

da

$$\int_{([0,1] \times \{0\}, K_i^t(0), \varepsilon)} \alpha + \underbrace{\int_{([1,0] \times \{1\}, K_i^t(1), \varepsilon)} \alpha}_{-\int_{([0,1] \times \{0\}, K_i^t(0), \varepsilon)} \alpha} = 0$$

Bemerke: Hieraus wird ersichtlich: Die $\sigma^i(x)$ hängen nicht von x_T ab, das heißt insbesondere sind sie nur vom Blatt $L_{F(x)}$ und demnach den Funktionswerten $F_i(x)$ abhängig.

Behauptung: Bei Änderung der 1-Form $\alpha \mapsto \alpha'$ (ebenfalls mit $d\alpha = \omega$), ändert sich die Funktion $\sigma^i|_{U_{L_c}}$ nur um eine additive Konstante.

Beweis: Es seien $y, z \in U_{L_c}$ (o.B.d.A $y_T = z_T$) beliebig, dazu die Verbindungsstrecke

$$I := \{ty_D + (1-t)z_D\} \subset D^n$$

Dann ist

$$\sigma_{\alpha}^i(y) - \sigma_{\alpha}^i(z) = \int_{K_i \times y_D} \Phi - \underbrace{\int_{K_i \times z_D} \Phi}_{-\int_{-K_i \times z_D} \Phi} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_{K_i \times I} \underbrace{d\alpha}_{\omega}$$

das heißt die Differenz $\sigma_{\alpha}^i(y) - \sigma_{\alpha}^i(z)$ hängt nur von ω und den Punkten y, z ab. Unter Verwendung eines anderen α' , könnte dann zwar

$$\sigma_{\alpha'}^i(y) - \sigma_{\alpha}^i(y) =: C$$

von 0 verschieden sein, doch ergäbe sich dann auch

$$\sigma_{\alpha'}^i(z) = \sigma_{\alpha}^i(z) + C$$

das heißt es wäre einfach

$$\sigma_{\alpha'}^i = \sigma_{\alpha}^i + C$$

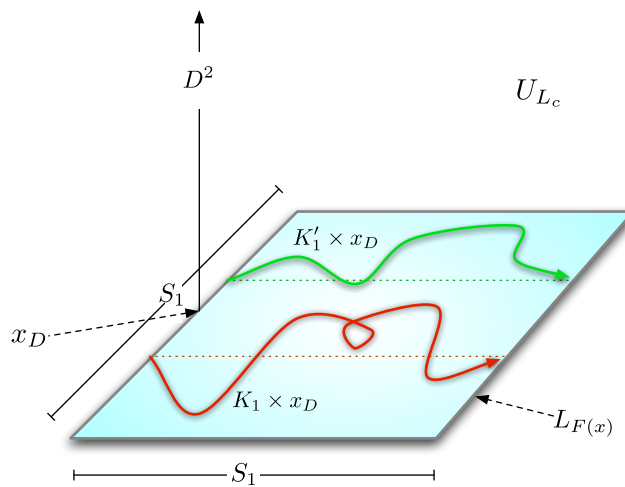


Abbildung 28: Zur Definition von s^i im Fall $n = 2$

- **Behauptung:** Es sind $s^i = -\sigma^i + C_i$, wobei die C_i konstanten sind.

Beweis: Nach obigen Überlegungen genügt es die Behauptung für eine willkürlichen Kreis K_i und 1-Form α (mit $d\alpha = \omega$) zu zeigen. Wählen dazu den standard-Kreis

$$K_i(t) = (0, \dots, 0, \underset{i}{\uparrow} t, 0, \dots, 0) \quad , \quad t \in S_1$$

und die Form

$$\alpha = \sum_i -s^i d\varphi^i$$

und schreiben

$$\int_{K_i \times x_D} \alpha = - \int_{K_i \times x_D} \sum_j s_j(\mathbf{F}(x_D)) \underbrace{(\rho^i)^* d\varphi^j}_{d\rho^j} = -s_i \int_0^1 dx = -s_i$$

- **Behauptung:** Es ist $X_{s^i} = \partial_{\varphi^i}$.

Beweis: Zu zeigen wäre $ds^i = \omega(\partial_{\varphi^i}, \cdot)$. Tatsächlich ist

$$\omega(\partial_{\varphi^i}, \cdot) = \left[\sum_j d\varphi^j \wedge ds^j \right] (\partial_{\varphi^i}, \cdot) = \sum_j \left[\underbrace{d\varphi^j(\partial_{\varphi^i})}_{\delta_i^j} ds^j - \underbrace{ds^j(\partial_{\varphi^i})}_0 d\varphi^j \right] = ds^i$$

- **Behauptung:** $d\varphi^i = \frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{s}, \mathbf{q})}{\partial s^i} d\mathbf{q}$.

Beweis:

$$\frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{s}, \mathbf{q})}{\partial s^i} d\mathbf{q}(\partial_{\varphi^j}) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial p^k(\mathbf{s}, \mathbf{q})}{\partial s^i} dq^k(X_{s^j}) \stackrel{(39)}{=} \sum_{k=1}^n \frac{\partial p^k(\mathbf{s}, \mathbf{q})}{\partial s^i} \frac{\partial s^j(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{\partial p^k} = \frac{\partial s^j}{\partial s^i} = \delta_{ij}$$

$$\frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{s}, \mathbf{q})}{\partial s^i} \underbrace{d\mathbf{q}(\partial_{s^i})}_0 = 0$$

□

Fazit

Gegeben seien die n Integrale F_i und die Hamilton Funktion H auf (M, ω) . Gegeben sei ferner $\alpha \in \Lambda^2 M$ mit $d\alpha = \omega$ (in der Physik meist schon in Darboux-Form $\alpha = -\mathbf{p} d\mathbf{q}$). Dann lässt sich die aus dem Satz (Teil 4) ergebende Rechenvorschrift wie folgt zusammenfassen:

1. Bestimmung der Blätter $L_c = \{x \in M : \mathbf{F}(x) = c\}$.
2. Wahl einer Basis K_1, \dots, K_n eindimensionaler Zyklen auf dem Torus L_c (d.h die Zunahme der j -ten Koordinate φ^j auf K_i ist δ_{ij}) und Integration¹³

$$s^i := - \int_{K_i} \alpha \stackrel{\text{Darboux}}{=} - \int_{K_i} \mathbf{p} d\mathbf{q} \rightsquigarrow \mathbf{s} = \mathbf{s}(\mathbf{F})$$

Die $s^i = s^i(\mathbf{F})$ sind genau die *Wirkungsvariablen*.

3. Bestimmung des Integrals

$$S(\mathbf{s}, \mathbf{q}) = \int_{\substack{\mathbf{q}_0 \\ \mathbf{s}:\text{const}}}^{\mathbf{q}} \mathbf{p}(\mathbf{s}, \tilde{\mathbf{q}}) d\tilde{\mathbf{q}}$$

Bemerke: $S(\mathbf{s}, \mathbf{q})$ ist die so genannte *erzeugende Funktion* der kanonischen Transformation $\mathbf{q}, \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{s}, \varphi$ (vgl. Hamilton-Jacobi Formalismus).

4. Bestimmung der *Winkelvariablen*

$$\varphi^i = \int_{\substack{\mathbf{q}_0 \\ \mathbf{s}:\text{const}}}^{\mathbf{q}} d\varphi^i = \int_{\substack{\mathbf{q}_0 \\ \mathbf{s}:\text{const}}}^{\mathbf{q}} \frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{s}, \tilde{\mathbf{q}})}{\partial s^i} d\tilde{\mathbf{q}} = \frac{\partial S(\mathbf{s}, \mathbf{q})}{\partial s^i} \rightsquigarrow \varphi(\mathbf{s}, \mathbf{q}) \stackrel{\mathbf{s}=\mathbf{s}(\mathbf{F}(\mathbf{q}, \mathbf{p}))}{=} \varphi(\mathbf{p}, \mathbf{q})$$

5. Die Koordinaten s^i, φ^i erfüllen dann Darstellung 47 und die Bewegungsgleichungen lauten

$$\dot{\varphi}^i = \frac{\partial H(\mathbf{s})}{\partial s^i} : \underbrace{\text{const}}_{\substack{\text{für} \\ \mathbf{s}:\text{const}}}, \quad \dot{s}^i = -\frac{\partial H(\mathbf{s})}{\partial \varphi^i} = 0$$

3.5 Probleme der klassischen Mechanik

3.5.1 Lemma über Niveaumengen von Hamilton-Funktionen

Es sei (M^{2n}, ω) eine $2n$ -dimensionale symplektische Mannigfaltigkeit, darauf $H, F \in C^\infty(M)$ mit

$$\{x : H = h_0\} = \{x : F = f_0\} =: Q^{2n-1} =: Q$$

Dann gilt:

$$\mu(x) \cdot X_F|_Q = \lambda(x) \cdot X_H|_Q$$

für geeignete skalare Felder μ, λ , das heißt X_H und X_F sind auf Q *parallel*.

¹³Eigentlich $s^i = -\frac{1}{2\pi} \int_{K_i} \alpha$ falls die φ^i 2π -periodisch sein sollen.

Beweis: Es sei $a \in Q$ und o.B.d.A $d_a H, d_a F \neq 0$ (ansonsten ist nach Bemerkungen von Korollar 3.2.3 Aussage trivial). Dann besitzt Q in einer Umgebung von a Struktur einer $(2n - 1)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit. Betrachten die 2-Form $\sigma \in \Lambda^2 Q$ definiert durch

$$\sigma := \omega|_Q$$

das heißt für $\xi, \eta \in TQ \subset TM$ ist

$$\sigma(\xi, \eta) := \omega(\xi, \eta)$$

Behauptung: Es ist $\text{kernel}(\sigma) = \text{span}\{X_H\}$ (punktweise). Dabei ist

$$\text{kernel}_x(\sigma) := \{\xi \in T_x Q : \forall \eta \in T_x Q : \sigma(\xi, \eta) = 0\}$$

Beweis:

- Per Konstruktion ist

$$T_x Q = \{\eta \in TM : \eta(H) = 0\}$$

so dass für $\eta \in T_x Q$ gilt

$$\sigma(X_H, \eta) = \omega(X_H, \eta) = \eta H = 0$$

das heißt $X_H \in \text{kernel}_x(\sigma)$. Da $\text{kernel}_x(\sigma)$ Vektorraum ist (klar!) ist

$$\text{span}\{X_H\} \subset \text{kernel}_x(\sigma)$$

- Es bleibt zu zeigen: $\dim \text{kernel}_x(\sigma) = 1$. Wählen Darboux-Koordinaten q^i, p^i auf M so dass $q^1 = H$ ist (nach Satz von Darboux möglich). Per Konstruktion ist dann

$$\sigma = \sum_{i=2}^n dq^i \wedge dp^i$$

denn für $\eta, \xi \in T_x Q$ ist

$$\omega(\eta, \xi) = \left[\sum_{i=1}^n dq^i \wedge dp^i \right] (\eta, \xi) = \underbrace{(dq^1 \wedge dp^1)(\eta, \xi)}_{dq^1(\eta)dp^1(\xi) - dq^1(\xi)dp^1(\eta) = 0} + \underbrace{\left[\sum_{i=2}^n dq^i \wedge dp^i \right]}_{\sigma} (\eta, \xi)$$

Außerdem sind wegen

$$\partial_{p^i} H = \partial_{p^i} q^1 = 0 \quad \wedge \quad \partial_{q^i} H = \partial_{q^i} q^1 \stackrel{i \geq 2}{=} 0$$

die $\partial_{q^2}, \dots, \partial_{q^n}, \partial_{p^1}, \dots, \partial_{p^n}$ Tangential zu Q (vgl. Lemma 2.7.17). In dieser Basis nimmt σ die Form

$$(\sigma) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & | & 0 & | & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots & & \ddots \\ 0 & \dots & 0 & | & 0 & & 1 \\ \hline 0 & \dots & 0 & | & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & & & | & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & | & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & -1 & | & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{(2n-1) \times (2n-1)}}$$

an. Abzulesen ist $\text{rang}(\sigma) = (2n - 2)$ also $\dim \text{kernel}(\sigma) = 1$.

Doch genauso ist auch

$$\text{kernel}(\sigma) = \text{span}\{X_F\}$$

so dass der Satz bewiesen ist.

□

3.5.2 Bemerkung über Hamilton-Fluss mechanischer Systeme

In der Physik wird ein zu untersuchendes mechanisches System oft als $2n$ -dimensionale, symplektische Mannigfaltigkeit¹⁴ $(M^{2n}, \omega = d\mathbf{q} \wedge d\mathbf{p})$ mit der Hamilton-Funktion

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \sum_{i,j=1}^n g^{ij}(\mathbf{q}) \cdot p_i p_j + U(\mathbf{q})$$

als in \mathbf{p} quadratische Form beschrieben. Definiert man

$$\tilde{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) := \sum_{i,j=1}^n \underbrace{\frac{g^{ij}(\mathbf{q})}{h_0 - U(\mathbf{q})}}_{\tilde{g}^{ij}} \cdot p_i p_j$$

für irgendein konstantes $h_0 : \text{const}$, so ist

$$\{H = h_0\} = \{\tilde{H} = 1\}$$

Nach Lemma 3.5.1 über Niveaumengen, gilt dann

$$X_H|_{\{H=h_0\}} = X_{\tilde{H}}|_{\{\tilde{H}=1\}}$$

Für ein abgeschlossenes mechanisches System kann man also stets die potentielle Energie U in den Koeffizienten g^{ij} der kinetischen Energie *unterbringen* und trotzdem im Prinzip den gleichen Phasenfluss (bis auf Zeittransformation) erhalten.

3.5.3 Korollar über Polynomiale Integrale

Es sei (M, ω) eine $2n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit mit Darboux-Koordinaten q^i, p^i und $H \in C^\infty(M)$ (Hamilton Funktion) mit der Darstellung

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \sum_{i=1}^n g^{ij}(\mathbf{q}) p_i p_j$$

Sei außerdem $F \in C^\infty$ mit der Darstellung

$$F = \sum_k F_k, \quad F_k = \sum_{i_1+\dots+i_n=k} a_{i_1\dots i_n}(\mathbf{q}) \cdot p_1^{i_1} \cdot \dots \cdot p_n^{i_n}$$

(auch unendliche Summen erlaubt). Dann gilt:

$$\{H, F\} = 0 \Leftrightarrow \{H, F_k\} = 0 \quad \forall k$$

Beweis: Wegen

$$\omega = d\mathbf{q} \wedge d\mathbf{p}$$

folgt nach Darstellungslemma 3.2.10:

$$\{H, F_k\} \stackrel{(3.2.10)}{=} \sum_{i=1}^n \underbrace{\left\{ \underbrace{\frac{\partial H}{\partial q^i}}_{\substack{\text{Monom} \\ 2. \text{ Grades} \\ \text{in } \mathbf{p}}} \quad \underbrace{\frac{\partial F_k}{\partial p^i}}_{\substack{\text{Monom} \\ (k-1). \text{ Grades} \\ \text{in } \mathbf{p}}} - \underbrace{\frac{\partial H}{\partial p^i}}_{\substack{\text{Monom} \\ 1. \text{ Grades} \\ \text{in } \mathbf{p}}} \quad \underbrace{\frac{\partial F_k}{\partial q^i}}_{\substack{\text{Monom} \\ k. \text{ Grades} \\ \text{in } \mathbf{p}}} \right\}}_{\text{Monom } (k+1). \text{ Grades in } \mathbf{p}}$$

Mit

$$\{H, F\} = \sum_k \{H, F_k\}$$

ist $\{H, F\}$ Summe aus Monomen unterschiedlichen Grades in \mathbf{p} . Bekanntlich ist somit $\{H, F\} \equiv 0$ genau dann wenn alle Monomen $\{H, F_k\}$ verschwinden.

□

¹⁴Der Übergang von der in erster Sicht n -dimensionalen Mannigfaltigkeit M^n für ein System mit n Koordinaten, zur tatsächlichen $2n$ -dimensionalen Phasenraum-Mannigfaltigkeit, wird durch die Betrachtung des Kotangentialbündels $T^*M = \{(\mathbf{q}, \mathbf{p})\} =: M^{2n}$ vollzogen. So ist insbesondere $H : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$.

3.5.4 Suche nach Integralen

Gegeben sei die Hamilton-Funktion

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \sum_{i,j=1}^n g^{ij}(\mathbf{q}) \cdot p_i p_j$$

auf der $2n$ -dimensionalen, symplektischen Mannigfaltigkeit $(M, \omega = d\mathbf{q} \wedge d\mathbf{p})$. Gesucht sind Integrale F , das heißt Felder $F \in C^\infty(M)$ mit $\{H, F\} = 0$. Da nicht-analytische Integrale angesichts der Anwendung meist ohnehin unbrauchbar sind, konzentriert man sich auf die Suche nach analytischen Ausdrücken.

Aus Lemma 3.5.3 über polynomiale Integrale ist ersichtlich dass man dabei hohe Hoffnungen schon auf polynomiale (sogar monomiale) Ausdrücke in \mathbf{p} setzen kann. Daraus ergaben sich historisch 2 Methoden zur Auffindung von Integralen:

1. Man sucht alle Systeme der Form

$$H = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \cdot p_i p_j$$

die Integrale F vom Grade 1,2,3.. usw. gestatten (Jacobi).

2. Gegeben H versucht man zu verstehen ob Integrale vom Grade 1,2,3... usw. existieren (Cartan-Kähler-Theorie).

3.5.5 Satz von Liouville über Systeme mit 2 Freiheitsgraden

Es sei M^2 eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit in den Koordinaten $q^1 = x, q^2 = y$, dazu die 4-dimensionale Mannigfaltigkeit T^*M^2 in den Koordinaten¹⁵ x, y, p_x, p_y , ausgestattet mit der symplektischen Form $\omega = d\mathbf{q} \wedge d\mathbf{p}$. Gegeben sei die Hamilton-Funktion

$$H : T^*M^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad H = \sum_{i,j} g^{ij}(x, y) \cdot p_i p_j$$

mit g^{ij} positiv definit und das Integral $F \in C^\infty(M^4)$:

$$\{H, F\} = 0$$

mit $dH \wedge dF|_P \neq 0$ für irgendeinen Punkt $P \in T^*M^2$ (F, H also funktional unabhängig in P). Ist F quadratisch in \mathbf{p} , das heißt

$$F = a(x, y)p_x^2 + b(x, y)p_x p_y + c(x, y)p_y^2 \tag{48}$$

so existieren in einer Umgebung U_P von P Koordinaten \tilde{x}, \tilde{y} so dass in diesen gilt

$$H = \frac{p_{\tilde{x}}^2 + p_{\tilde{y}}^2}{X(\tilde{x}) - Y(\tilde{y})} \quad , \quad F = \frac{Y(\tilde{y})p_{\tilde{x}}^2 + X(\tilde{x})p_{\tilde{y}}^2}{Y(\tilde{x}) - X(\tilde{y})}$$

Bemerkung: Per Konstruktion der $p_{\tilde{x}}, p_{\tilde{y}}$ nimmt ω stets die Form $\omega = d\tilde{\mathbf{q}} \wedge d\tilde{\mathbf{p}}$ an.

Beweis des Satzes

- Nach Satz von Riemann (ohne Beweis) existiert ein Koordinatensystem \tilde{x}, \tilde{y} so dass

$$H = \frac{p_{\tilde{x}}^2 + p_{\tilde{y}}^2}{\lambda(\tilde{x}, \tilde{y})} \tag{49}$$

ist. Es seien ab nun o.B.d.A x, y so dass Darstellungen 48 und 49 gelten.

- **Behauptung:** Die Abbildung

$$R : D^2 \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad , \quad R(x + iy) = R(x, y) := F(x, y, 1, i) \tag{50}$$

ist holomorph.

Beweis: R besitzt die Darstellung

$$R(x, y) = a(x, y) - c(x, y) + ib(x, y)$$

¹⁵Dem Element $(x, y, p_x dx + p_y dy) \in T^*M^2$ entsprechen also die Koordinaten (x_a, y_a, p_x, p_y) .

Ferner gilt

$$\begin{aligned}
0 = \{H, F\} &= \sum_i \left\{ \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial F}{\partial p^i} - \frac{\partial H}{\partial p^i} \frac{\partial F}{\partial q^i} \right\} \\
&= - (p_x^2 + p_y^2) (2ap_x + bp_y) \cdot \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial \lambda}{\partial x} - (p_x^2 + p_y^2) (2cp_y + bp_x) \cdot \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial \lambda}{\partial y} \\
&\quad - \frac{2p_x}{\lambda} \left[\frac{\partial a}{\partial x} p_x^2 + \frac{\partial b}{\partial x} p_x p_y + \frac{\partial c}{\partial x} p_y^2 \right] - \frac{2p_y}{\lambda} \left[\frac{\partial a}{\partial y} p_x^2 + \frac{\partial b}{\partial y} p_x p_y + \frac{\partial c}{\partial y} p_y^2 \right]
\end{aligned}$$

Nach dem Fortsetzungssatz über komplexe Funktionen muss $\{H, F\}$ auch in einer Umgebung von \mathbb{C} verschwinden. Insbesondere für $p_x = 1$ und $p_y = i$ ergibt sich

$$0 = \left[\frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial x} \right] - i \left[\frac{\partial a}{\partial y} - \frac{\partial c}{\partial y} + \frac{\partial b}{\partial x} \right]$$

das heißt

$$\frac{\partial(a-c)}{\partial x} = \frac{\partial b}{\partial y}, \quad \frac{\partial(a-c)}{\partial y} = -\frac{\partial b}{\partial x}$$

was genau den Cauchy-Riemann DGL entspricht!

- **Behauptung:** Allgemeine holomorphe Transformationen

$$x + iy \mapsto u(x, y) + iv(x, y)$$

erhalten die Form von H , das heißt in den neuen Koordinaten u, v nimmt H stets die Form 49 an.

Beweis: Per Konstruktion transformieren sich die Koordinaten p_i bei der Transformation $\mathbf{q} \mapsto \tilde{\mathbf{q}}$ gemäß

$$\tilde{p}_i = \frac{\partial q^i}{\partial \tilde{q}^j} p_j \Leftrightarrow \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_u \\ p_v \end{pmatrix} \stackrel{\text{holomorph}}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ -\frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_u \\ p_v \end{pmatrix}$$

das heißt

$$H = \underbrace{\frac{1}{\lambda(x(u, v), y(u, v))}}_{\tilde{\lambda}(u, v)} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \cdot (p_u^2 + p_v^2)$$

- Die Funktion R (definiert in 50) ist Koordinatenabhängig (da die Darstellung von F koordinatenabhängig ist). Es sei $\tilde{R}(u, v) := F(u, v, 1, i)$ die entsprechend definierte Funktion in den neuen Koordinaten u, v .

Behauptung: Es gilt:

$$\tilde{R} \underbrace{(u, v)}_w = R \underbrace{(x(u, v), y(u, v))}_{z(w)} \cdot \left(\frac{d(u + iv)}{d(x + iy)} \right)^2$$

an.

Beweis: Analog zu vorhin schreiben wir

$$\begin{aligned}
\tilde{R}(w) = F(w, 1, i) &= a(z(w)) \left(\frac{\partial u}{\partial x} p_u + \frac{\partial v}{\partial x} p_v \right)^2 \\
&\quad + b(z(w)) \left(\frac{\partial u}{\partial x} p_u + \frac{\partial v}{\partial x} p_v \right) \left(-\frac{\partial v}{\partial x} p_u + \frac{\partial u}{\partial x} p_v \right) + c(z(w)) \left(-\frac{\partial v}{\partial x} p_u + \frac{\partial u}{\partial x} p_v \right)^2 \Bigg|_{\substack{p_u=1 \\ p_v=i}} \\
&= a \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + b \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left(-\frac{\partial v}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial x} \right) + c \left(-\frac{\partial v}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \\
&= \left[a(z(w)) - c(z(w)) + ib(z(w)) \right] \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 = R(z(w)) \cdot \left(\frac{dw}{dz} \right)^2
\end{aligned}$$

- **Behauptung:** Man kann u, v so wählen dass $\tilde{R}(u, v) \equiv 1$ ist.

Beweis: Gegeben sei $R(x, y)$ mit $R(x_P, y_P) \neq 0$. Dann erfüllt in einer Umgebung von (x_0, y_0) die Transformation

$\underbrace{(x + iy)}_z \mapsto \underbrace{(u + iv)}_w$ definiert durch

$$w(z) := \int_{z_0}^z \frac{1}{\sqrt{R(x, y)}} dz$$

genau diese Bedingung, denn

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{\sqrt{R(z)}}$$

das heißt

$$\tilde{R}(w) = R(z(w)) \cdot \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 \equiv 1$$

Bemerke dass $w(z)$ wohldefiniert ist, da das Integral wegunabhängig ist. In diesen Koordinaten ist nun $a = c + 1$ und $b = 0$, das heißt

$$F = (c + 1)p_u^2 + cp_v^2$$

- Nach obigen Überlegungen kann man nun o.B.d.A H und F in den Darstellungen

$$F = (c + 1)p_x^2 + cp_y^2, \quad H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{\lambda(x, y)}$$

annehmen. Aus $0 = \{H, F\}$ folgt

$$\begin{aligned} 0 \equiv \{H, F\} &= -2(p_x^2 + p_y^2) \cdot \left[(c + 1) \frac{p_x}{\lambda^2} \frac{\partial \lambda}{\partial x} + c \frac{p_y}{\lambda^2} \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{p_x}{\lambda} \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{p_y}{\lambda} \frac{\partial c}{\partial y} \right] \\ &= -2 \left\{ (p_x^3 + p_y^2 p_x) \left[(c + 1) \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial c}{\partial x} \right] + (p_y^3 + p_x^2 p_y) \left[\frac{c}{\lambda^2} \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial c}{\partial y} \right] \right\} \end{aligned}$$

Insbesondere müssen somit bekanntlich die Koeffizienten vor den verschiedenen Potenzen $p_x^i p_y^j$ verschwinden:

$$\underbrace{\left[(c + 1) \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \lambda \frac{\partial c}{\partial x} \right]}_{\frac{\partial(c\lambda)}{\partial x} + \frac{\partial \lambda}{\partial x}} = 0, \quad \underbrace{\left[c \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \lambda \frac{\partial c}{\partial y} \right]}_{\frac{\partial(c\lambda)}{\partial y}} = 0$$

Durch Differenzieren der Ausdrücke erhält man

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial y} = 0 \Rightarrow \lambda = X(x) - Y(y)$$

und mit $\partial_y(c\lambda) = 0$ entsprechend

$$(X(x) - Y(y)) \cdot c(x, y) = \tilde{X}(x)$$

Mit $\partial_x(c\lambda) + \partial_x \lambda = 0$ ergibt sich

$$\frac{d\tilde{X}}{dx} + \frac{dX}{dx} = 0 \Rightarrow \tilde{X} = -X + C, \quad C : \text{const}$$

also

$$c(x, y) = \frac{C - X(x)}{X(x) - Y(y)}$$

und somit

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{X - Y}, \quad F = \frac{(C - Y)p_x^2 + (C - X)p_y^2}{X - Y}$$

Mit $X_* := X - C$, $Y_* := Y - C$ ergeben sich schließlich die Darstellungen

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{X_*(x) - Y_*(y)}, \quad F = \frac{Y_*(y)p_x^2 + X_*(x)p_y^2}{Y_*(y) - X_*(x)}$$

□